Die Berechnung der Phase beugender Strukturen aus Messungen im Brennraum

Reinhard Krusche

1972

DIE BERECHNUNG DER PHASE BEUGENDER STRUKTUREN AUS MESSUNGEN IM BRENNRAUM

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
Reinhard Krusche
aus Namslau

München 1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Berichterstatter: 1. Prof. Dr. R. Röhler

2. Prof. Dr. H. Bross

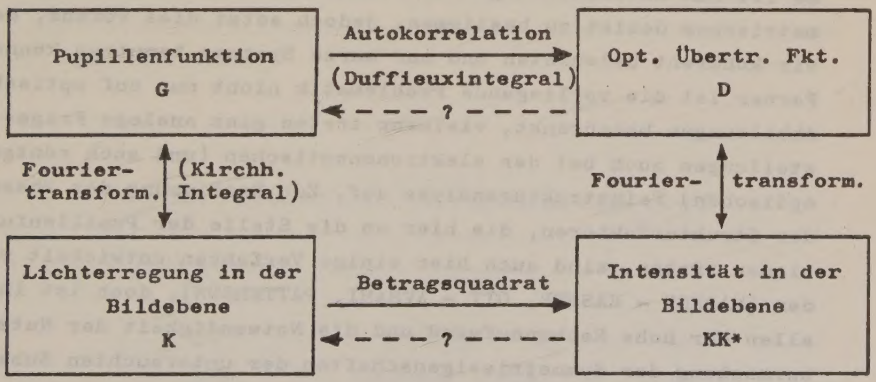
Tag der mündlichen Prüfung: 24. 4. 1972

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1
2. Grundlagen 4
3. Allgemeine Lösung des Phasenproblems 12
   3.1. Zu den Überlegungen von O'NEILL und WALTHER 12
   3.2. Das Schmetterlingsdiagramm 16
   3.3. Allgemeine Lösung des Phasenproblems 21
   3.4. Zwei Beispiele 25
4. Einige Spezialfälle 32
   4.1. Nur von einem Parameter abhängige Pupillenfunktionen 32
   4.2. Separierbare Koordinaten; $G(\xi,\eta) = G_1(\xi)\, G_2(\eta)$ 39
   4.3. Rotationssymmetrische Pupillenfunktion 44
5. Umfang der Messungen im Brennraum 63
   5.1. Interpolationsformeln im eindimensionalen Fall 63
   5.2. Zweidimensionale Spezialfälle 67
   5.3. Abschätzung für große Defokussierungen 71
6. Zusammenfassung 74
7. Literaturnachweis 76
8. Mathematischer Anhang 78

1. Einleitung

Durch das Kirchhoffsche Beugungsintegral ist zwischen (komplexer) Lichterregung im Punktbild und Pupillenfunktion ein eindeutiger Zusammenhang gegeben, beide Funktionen sind also ineinander transformierbar. Mit Kenntnis der Pupillenfunktion ist es ferner - zumindest im Prinzip - dann leicht, die Optische Übertragungsfunktion D(u) zu berechnen.
Leider ist nun aus prinzipiellen Gründen die komplexe Lichterregung der Messung direkt nicht zugänglich, sondern lediglich deren Betragsquadrat KK*, also die Intensität. Da sich aber jeder Intensität beliebig viele komplexe Lichterregungen K zuordnen lassen, ist eine Eindeutigkeit dieser Zuordnung nicht mehr gegeben. Auf ebensolche Schwierigkeiten stößt der Versuch der "Entfaltung" des Duffieux-Integrals, also der Versuch, aus dem in diesem Fall gemessenen D(u) die Pupillenfunktion nach Amplitude und Phase zu bestimmen. Das nachfolgende Blockdiagramm (gestrichelte Zuordnungen sind nicht eindeutig) illustriert diese Zusammenhänge:



Anhand eines Beispiels wurde diese Problematik bereits 1963 von O'NEILL und WALTHER /5/ (s. Kap. 3) ausführlich untersucht:

Zu einer vorgegebenen Punktbildverteilung bzw. OÜF werden 4 mögliche Lichterregungen und somit auch Pupillenfunktionen konstruiert, es verschwindet aber nur eine der potentiellen Pupillenfunktionen außerhalb eines endlichen Pupillenbereiches, die durch die Endlichkeit der beugenden Öffnung implizierte Bandbegrenzung der Lichterregung führt doch noch zu einer eindeutigen Lösung. Ein praktisch brauchbares Rechenverfahren kann auf dieser Basis gegebenermaßen jedoch nicht entwickelt werden.

In einer nachfolgenden Arbeit /6/ wird dann der Beweis erbracht, daß jede reelle, nichtnegative, integrierbare und bandbegrenzte Funktion (d.h. z.B. jede Intensitätsverteilung in einem von einem endlichen beugenden Objekt entworfenen Punktbild) das Betragsquadrat einer bandbegrenzten komplexen Funktion (hier der entspr. Lichterregung) ist; es wird aber gleichzeitig gezeigt, daß dieses Problem i.a. so nicht eindeutig zu lösen ist, daß dies vielmehr nur der Fall ist, wenn die Lichterregung K(x) keine komplexen Nullstellen hat.

Es ist nun natürlich möglich, Phasenstrukturen auf interferometrischem Gebiet zu bestimmen, jedoch setzt dies voraus, daß wir kohärent beleuchten und nur kurze Systeme benutzen können. Ferner ist die vorliegende Problematik nicht nur auf optische Abbildungen beschränkt, vielmehr treten ganz analoge Fragestellungen auch bei der elektronenoptischen (und auch röntgenoptischen) Feinstrukturanalyse auf. Zur Bestimmung der Phase der Strukturfaktoren, die hier an die Stelle der Pupillenfunktionen treten, sind auch hier einige Verfahren entwickelt worden (HARKER - KASPER, OTT - AVRAMI, PATTERSON), doch ist ihnen allen der hohe Rechenaufwand und die Notwendigkeit der Nutzbarmachung der Symmetrieeigenschaften der untersuchten Substanzen eigen.

Es besteht aber nun, wie bereits von H. PULVERMACHER /9/ gezeigt wurde, auch die Möglichkeit, die zur eindeutigen Rekonstruktion einer Pupillenfunktion notwendigen zusätzlichen In-

formationen durch weitere Messungen im Brennraum (Defokussierung, Astigmatismus) hinzuzugewinnen. Aufgabe der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung sein, inwieweit und in welchem Umfang dieser Vorschlag zu verwirklichen ist; insbesondere wird das Hauptaugenmerk darauf gerichtet sein, daß die Beschaffung der zu einer Rückrechnung benötigten Daten auch mit einem endlichen experimentellen Aufwand zu realisieren ist.

2. Grundlagen

Können wir ein optisches System als räumlich stationäres System betrachten und beschreiben wir Objekt und Bild durch die Kohärenzfunktion (mutual coherence function)

$$\Gamma(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\tau) = \langle V_1(t+\tau)\, V_2(t)\rangle$$

(V_1 und V_2 sind die analytischen Signale im Punkt 1 und 2, die eckigen Klammern bedeuten zeitliche Mittelung), so hat das allgemeine skalare Abbildungsproblem (Fig. 1) in quasimonochromatischer Näherung die Lösung [1 - 3, 9]:

$$\Gamma_b(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = \iint_{\text{Objekt}} \Gamma_o(\underline{x}_1',\underline{x}_2')\, K(\underline{x}_1-\underline{x}_1')\, K^*(\underline{x}_2-\underline{x}_2')\, d\underline{x}_1'\, d\underline{x}_2'; \qquad (2.1)$$

$\Gamma_b(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ bzw. $\Gamma_o(\underline{x}_1',\underline{x}_2')$ ist die räumliche Kohärenzfunktion im Bild bzw. im Objekt. Die Abbildung wird durch die Kerne K beschrieben, deren physikalische Bedeutung im Anschluß an Gleichung (2.6) erklärt werden wird. Bezüglich der Koordinaten siehe Abb. 1:

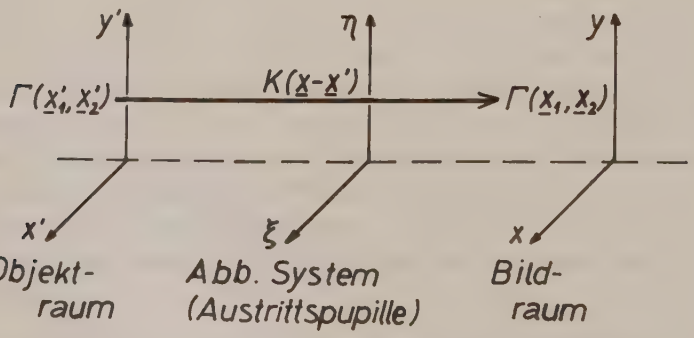


Fig. 1: Zum allgemeinen Abbildungsproblem

Fallen die beiden Punkte $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ zusammen, so gibt (2.1) die Intensität im Bild ($\underline{x}_1 = \underline{x}_2 \equiv \underline{x}$)

$$I_b(\underline{x}) = \iint_{\text{Objekt}} \Gamma_o(\underline{x}_1', \underline{x}_2')\, K(\underline{x} - \underline{x}_1')\, K^*(\underline{x} - \underline{x}_2')\, d\underline{x}_1'\, d\underline{x}_2' \,. \qquad (2.2)$$

I. a. beschreibt diese Gleichung einen nichtlinearen Prozeß, und eine Lösung ist nur für sehr wenige einfache Objekte möglich. Daher seien hier nur die beiden Grenzfälle inkohärenter und kohärenter Beleuchtung betrachtet.

Bei inkohärenter Abbildung ist

$$\Gamma_o(\underline{x}_1', \underline{x}_2') = I(\underline{x}_1')\, \delta(\underline{x}_1' - \underline{x}_2') \,, \qquad (2.3)$$

mit $\underline{x}_1' \equiv \underline{x}'$ geht (2.2) also über in

$$I_b(\underline{x}) = \int_{\text{Objekt}} I_o(\underline{x}')\, |K(\underline{x} - \underline{x}')|^2\, d\underline{x}' . \qquad (2.4)$$

Hierin ist $|K(\underline{x} - \underline{x}')|^2 = d(\underline{x} - \underline{x}')$ als Intensität im Bild eines einzelnen Objektpunktes zu deuten; die Bildfunktion I_b ergibt sich aus der Objektfunktion I_o durch Faltung mit dieser Punktverteilung.

Im kohärenten Grenzfall ist dagegen

$$\Gamma_o(\underline{x}_1', \underline{x}_2') = U(\underline{x}_1')\, U^*(\underline{x}_2') , \qquad (2.5)$$

worin $U(\underline{x}_i')$ die Lichterregung (komplexe Amplitude) in $\underline{x}_i'$ bedeutet. (2.2) nimmt diesmal die Form an:

$$I_b(\underline{x}) = |U_b(\underline{x})|^2 = \left| \int_{\text{Objekt}} U_o(\underline{x}')\, K(\underline{x} - \underline{x}')\, d\underline{x}' \right|^2 , \qquad (2.6)$$

$K(\underline{x} - \underline{x}')$ ist in Analogie zur Beschreibung von $d(\underline{x} - \underline{x}')$ als Lichterregung im Punktbild zu deuten.

Durch $K(\underline{x} - \underline{x}')$ bzw. $d(\underline{x} - \underline{x}') = |K(\underline{x} - \underline{x}')|^2$ sind die Abbil-

dungseigenschaften des betr. optischen Systems eindeutig bestimmt, und es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß zwar $d(\underline{x} - \underline{x}')$ eine meßbare Größe ist, nicht dagegen $K(\underline{x} - \underline{x}')$.

Üblicherweise werden zur Beschreibung der Abbildungseigenschaften optischer Systeme jedoch nicht die Größen K und d herangezogen, sondern deren Fouriertransformierte. Schreiben wir die Fouriertransformierten von Größen, die mit großen Buchstaben bezeichnet sind, mit kleinen Buchstaben und umgekehrt und unterwerfen wir die Gleichungen (2.6) und (2.4) einer Fouriertransformation, so ist nach dem Faltungstheorem

$$u_b(\underline{u}) = u_o(\underline{u})\ k(\underline{u}) \qquad (2.7)$$

bzw.

$$i_b(\underline{u}) = i_o(\underline{u})\ D(\underline{u}) \qquad (2.8)$$

mit

$$D(\underline{u}) = \int k(\underline{w} + \underline{u})\ k^*(\underline{w})\ d\underline{w}\ ; \qquad (2.9)$$

$\underline{u}$ und $\underline{w}$ sind Variable im Ortsfrequenzraum, $k(\underline{u})$ ist die kohärente Übertragungsfunktion, $D(\underline{u})$ die inkohärente Übertragungsfunktion, auch Optische Übertragungsfunktion (OÜF) genannt; der Betrag von $D(\underline{u})$ wird i.a. als Modulationsübertragungsfunktion (MÜF) bezeichnet, es wird jedoch mitunter die Bezeichnung MÜF auch für $D(\underline{u})$ selber angewandt. Das Autokorrelationsintegral (2.9), das den Zusammenhang zwischen $k(\underline{u})$ und $D(\underline{u})$ angibt, ist als Duffieux- Integral bekannt. $k(\underline{u})$ bzw. $D(\underline{u})$ beschreiben das abbildende System ebenfalls vollständig.

Nun ist (vgl. Abb. 2) der Zusammenhang zwischen Lichterregung im Punktbild und Pupillenfunktion (Lichterregung über die Austrittspupille) des betreffenden Systems durch das Kirchhoffsche Beugungsintegral ebenfalls in Form einer Fouriertransformation gegeben ($\underline{x}' = 0$):

$$K(\underline{x}) = \text{const.} \int_{\substack{\text{Pupillen-}\\\text{ebene}}} G(\underline{\xi}) \exp\left[-2\pi i \frac{\underline{x}\underline{\xi}}{\lambda R}\right] d\underline{\xi}$$

$$= \text{const.}' \int_{\substack{\text{Pupillen-}\\\text{ebene}}} G(\lambda R \underline{u}) \exp\left[-2\pi i \underline{x}\underline{u}\right] d\underline{u} \,. \qquad (2.10)$$

$G(\underline{\xi})$ ist die Pupillenfunktion, $\underline{\xi}$ die Pupillenkoordinate (eigentlich der Punkt auf der Gaußschen Bezugskugel), λ die Lichtwellenlänge und R der Radius der Gaußschen Referenzkugel [2]. Die Konstante const. bzw. const.' ist durch Normierung zu bestimmen; dabei wird das Integral über die Leuchtdichte im Punktbild gewöhnlich auf 1 normiert, d.h. es gilt

$$\int |K(\underline{x})|^2 \, d\underline{x} = \int d(\underline{x}) \, d\underline{x} = D(0)$$

$$= \int |k(\underline{w})|^2 \, d\underline{w} = 1 \,; \qquad (2.11)$$

hiermit ist gleichzeitig eine Normierung für $D(\underline{u})$ gegeben.

Zwischen G und k gilt somit die Beziehung

$$k(\underline{u}) = \text{const.}' \; G(\lambda R \underline{u}), \qquad (2.12)$$

das Duffieuxintegral kann also auch in folgender, etwas praktischerer Form geschrieben werden

$$D(\underline{u}) = |\text{const.}'|^2 \int G\{\lambda R(\underline{w} + \underline{u})\} G^*\{\lambda R \underline{w}\} \, d\underline{w} \,. \qquad (2.13)$$

Im folgenden wird statt k fast immer die Pupillenfunktion G verwendet werden.

Aus (2.12) folgt nun, daß die Fouriertransformierte von $K(\underline{x})$ nur in dem Intervall von Null verschieden ist, in dem dies auch für $G(\lambda R\underline{u})$ der Fall ist; $D(\underline{u})$, also die Fouriertransformierte von $d(\underline{x})$, ist gemäß (2.9) ebenfalls nur in einem bestimmten, allerdings doppelt so großen Intervall von Null verschieden. In derartigen Fällen empfiehlt sich bei numerischen Berechnungen die Anwendung des Sampling - Theorems, auf das somit an dieser Stelle kurz einzugehen ist.

Dieses Theorem besagt: Eine Funktion $f(x)$, deren Fourierspektrum F die Breite W hat, kann dargestellt werden durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{W}\right) \frac{\sin \pi (Wx-k)}{\pi (Wx-k)} \quad , \qquad (2.14)$$

die Kenntnis der Funktionswerte an den Punkten k/W (Samplingpunkte) ist also für die Kenntnis von $f(x)$ hinreichend [4]. Im Gegensatz zur Fourierentwicklung ist ein endliches Stück der Funktion $f(x)$ bis auf einen kleinen Fehler durch die Werte an endlich vielen Samplingpunkten in einem endlichen Intervall um dieses endliche Stück bestimmt, da nur die Samplingfunktionen, deren Maxima in einem endlichen Intervall um x_o liegen, wesentliche Beiträge zu $f(x_o)$ liefern. Einige hiermit zusammenhängende Fragen werden in Kapitel 5 noch etwas ausführlicher behandelt werden; die eindimensionale Schreibweise von (2.14) dient nur der Einfachheit der Darstellung.

Im rotationssymmetrischen Fall, in dem die (zweidimensionale) Fouriertransformation in eine Hankeltransformation

$$F(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} r\, f(r)\, J_o(2\pi\omega r)\, dr \qquad (2.15)$$

übergeht (J_o = Besselfunktion 0. Ordnung), hat das Sampling-

theorem die Form [20, 21]

$$f(r) = \frac{1}{\pi W} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k f(\alpha_k)\, J_0(2\pi W r)}{J_1(2\pi W \alpha_k)(\alpha_k^2 - r^2)} \quad ; \qquad (2.16)$$

die α_k sind dabei gegeben durch $J_0(2\pi\alpha_k W) = 0$ mit $k = 1, 2, \ldots$, vorausgesetzt wurde $F(\omega) = 0$ für $\omega > W$.

Integrieren wir nun $f(r)$ über eine der beiden kartesischen Koordinaten, z.B. über y, d.h. bilden wir im optischen Fall - hier entspricht $f(r)$ der Punktbildintensität und $F(\omega)$ der OÜF - die sog. "line spread function" (Linienbildverteilung, Spaltbild), so ist die Fouriertransformierte von

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dy \qquad (2.17)$$

mit der Hankeltransformierten von $f(r)$ identisch [20, 22]; denn es ist aus Symmetriegründen und unter Einführung von Polarkoordinaten

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dy\, \exp\{2\pi i u x\}\, dx \qquad (2.18)$$

$$= 4 \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} f(r)\, \cos(2\pi u r \sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{0}^{\infty} f(r)\, J_0(2\pi u r)\, r\, dr\,,$$

wobei die Definition der Besselfunktion

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi \qquad (2.19)$$

benutzt wurde.

Da - wie bereits einleitend bemerkt - das hier untersuchte Verfahren auf der Hinzugewinnung weiterer Information aus Messungen außerhalb der Gaußschen Bildebene beruht, seien hier abschließend die Verhältnisse für eine außerhalb der Bildebene liegende Auffangebene angeführt. Für den Zusammenhang zwischen der Lichterregung K in einem Punkt des Brennraums und der Pupillenfunktion G ist nunmehr folgende allgemeinere Form des Kirchhoffschen Beugungsintegrals heranzuziehen [2] (vgl. Fig.2):

$$K(\underline{x},z) = \text{const.} \int_{\text{Pupillenebene}} G(\underline{\xi}) \exp\left[-2\pi i \frac{(\underline{x},z)\underline{r}}{\lambda R}\right] d\underline{\xi}. \qquad (2.20)$$

$\frac{(\underline{x},z)\underline{r}}{\lambda R}$ läßt sich nun aufspalten in

$$\frac{(\underline{x},z)\underline{r}}{\lambda R} = \frac{\underline{x}\underline{\xi}}{\lambda R} + \frac{z\xi}{\lambda R}, \qquad (2.21)$$

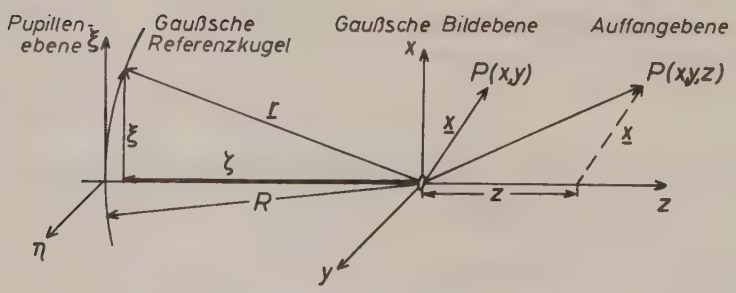


Fig. 2: Zum Kirchhoffschen Beugungsintegral

und ζ ist schließlich

$$\zeta = -\sqrt{r^2 - \xi^2} = -\sqrt{R^2 - \xi^2} \qquad (2.22)$$
$$= -R\sqrt{1 - \xi^2/R^2} \approx -R\left(1 - \frac{\xi^2}{2R^2}\right);$$

alle folgenden Aussagen gelten also nur unter der Voraussetzung $|\xi| \ll R$.

Somit ist

$$K(\underline{x}, z) = \text{const.} \int_{\text{Pupillenebene}} G(\underline{\xi}) \exp\left\{-2\pi i \left[\frac{\underline{x}\underline{\xi}}{\lambda R} + \frac{z\underline{\xi}^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\underline{\xi} \exp\left\{2\pi i \frac{z}{\lambda}\right\}. \qquad (2.23)$$

Fassen wir in (2.23) $G(\underline{\xi})$ und den von z abhängigen Anteil der Exponentialfunktion zu einer neuen Pupillenfunktion

$$G_z(\underline{\xi}) = G(\underline{\xi}) \exp\left\{2\pi i \left[\frac{z}{\lambda} - \frac{z\underline{\xi}^2}{2\lambda R^2}\right]\right\}. \qquad (2.24)$$

zusammen, so kann die für die nunmehrige Auffangebene geltende OÜF durch Einsetzen der neuen Pupillenfunktion in das Faltungsintegral (2.13) berechnet werden. Dies führt zu

$$D_z(\underline{u}) \equiv D(\underline{u}, z) = |\text{const.}'|^2 \exp\left\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} \underline{u}^2\right\} \cdot$$
$$\cdot \int G\{\lambda R(\underline{u} + \underline{w})\}\, G^*\{\lambda R \underline{w}\} \exp\{-2\pi i z \lambda \underline{u}\underline{w}\}\, d\underline{w}; \qquad (2.25)$$

der konstante Phasenfaktor $\exp(2\pi i z/\lambda)$ in (2.24) geht also dabei in die Rechnung nicht ein.

Denselben Ausdruck für $D_z(\underline{u})$ erhalten wir durch Fouriertransformation des Betragsquadrates der Lichterregung (2.23) in Bezug auf $\underline{x}$.

3. Allgemeine Lösung des Phasenproblems

3.1. Zu den Überlegungen von O'-NEILL und WALTHER

Die gesamte, mit dem Versuch der Rekonstruktion einer Pupillenfunktion aus Intensitäts - bzw. OÜF-Messungen in der Bildebene zusammenhängende Problematik wurde - wie schon erwähnt - bereits in [5] ausführlich diskutiert:

Die Spaltfunktion

$$G(\xi) \equiv G(\lambda R u) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\xi| \leq b \quad \text{bzw. } |u| \leq \frac{b}{\lambda R} \\ 0 & \text{für } |\xi| > b \quad \text{bzw. } |u| > \frac{b}{\lambda R} \end{cases}, \qquad (3.1)$$

die die Abbildungseigenschaften einer aberrationsfreien (und unendlich lang gedachten) Zylinderlinse beschreibt und daher nur die Beugung berücksichtigt, führt bekanntlich - bis auf die hier weggelassene Normierungskonstante - im Punktbild zur Lichterregung ($\bar{x} = 2bx/\lambda R$)

$$K = \frac{\sin \frac{2\pi b x}{\lambda R}}{\frac{2\pi b x}{\lambda R}} = \frac{\sin \pi \bar{x}}{\pi \bar{x}} \qquad (3.2)$$

und somit zur Intensität

$$d = KK^* = \left(\frac{\sin \pi \bar{x}}{\pi \bar{x}} \right)^2, \qquad (3.3)$$

die Optische Übertragungsfunktion ist

$$D(u) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda R}{2b} u & \text{für } |u| \leq \frac{2b}{\lambda R} \\ 0 & \text{für } |u| > \frac{2b}{\lambda R} \end{cases}. \qquad (3.4)$$

Insoweit ist das Problem eindeutig. Ist jedoch die Intensität bzw. die OÜF vorgegeben, können wir der durch (3.3) gegebenen Intensität (einschließlich (3.2)) z.B. u.a. folgende 4 möglichen Lichterregungen zuordnen (vgl. Abb. 3):

$$K_1 = \frac{\sin \pi \bar{x}}{\pi \bar{x}} \; ; \qquad K_3 = \frac{|\sin \pi \bar{x}|}{\pi \bar{x}} \; ;$$
$$K_2 = \frac{\sin \pi \bar{x}}{|\pi \bar{x}|} \; ; \qquad K_4 = \left| \frac{\sin \pi \bar{x}}{\pi \bar{x}} \right| . \tag{3.5}$$

Die zugehörigen Pupillenfunktionen sind dann (vgl. ebenfalls Abb. 3):

$$G_1(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\xi| \leq b \\ 0 & \text{für } |\xi| > b \end{cases} ;$$

$$G_2(\xi) = \frac{i}{\pi} \ln \left| \frac{\xi - b}{\xi + b} \right| ;$$

$$G_3(\xi) = -\frac{2i}{\pi} \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \xi < 2b \\ -1 & \text{für } -2b \leq \xi < 0 \\ 1/3 & \text{für } 2b \leq \xi < 4b \\ -1/3 & \text{für } -4b \leq \xi < -2b \\ 1/5 & \text{für } 4b \leq \xi < 6b \\ -1/5 & \text{für } -6b \leq \xi < -4b \\ 1/7 & \text{für } 6b \leq \xi < 8b \\ -1/7 & \text{für } -8b \leq \xi < -6b \\ & \text{usw.} \end{cases} ; \tag{3.6}$$

$$G_4(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\xi}{2b}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\xi}{2b}} \frac{\tan \sigma}{\sigma} \, d\sigma = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left| 1 - \frac{4n^2 b^2}{\xi^2} \right|}{(2n-1)(2n+1)} .$$

(Zur Berechnung siehe Anhang I.)

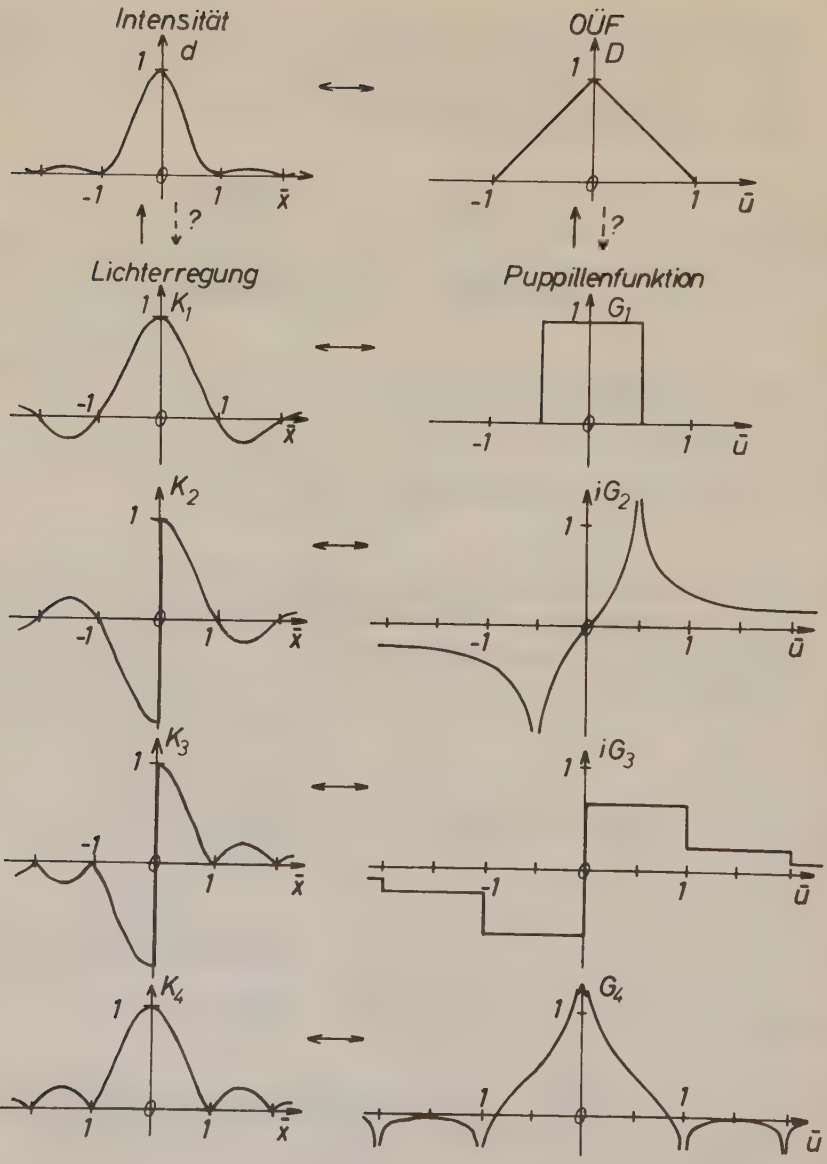


Fig. 3: Die Überlegungen von O'NEILL und WALTHER; $\bar{u} = \frac{\lambda R}{2b} u$, $u = \frac{\xi}{\lambda R}$

Das Autokorrelationsintegral aller 4 Funktionen führt auf die durch (3.4) gegebene OÜF, doch verschwindet, wie aus Abb. 3 sofort zu sehen ist, nur G_1 außerhalb eines endlichen Frequenz- bzw. Pupillenbereichs, d.h. diese Pupillenfunktion kommt nur in Frage.

In Hinblick auf unsere späteren Untersuchungen, interessiert uns natürlich hier die Frage: Wie sehen die 4 zu den Pupillenfunktionen G_1 ... G_4 gehörigen Übertragungsfunktionen außerhalb der Gaußschen Bildebene, d.h. bei Defokussierung aus ? Zur Untersuchung dieser Frage gibt uns Formel (2.25) die Möglichkeit. Ohne dabei auf die vielfältigen Methoden zur Auswertung dieses Integrals zurückzugreifen /vgl. z.B. 9 - 19/, wollen wir die zwei - noch mit vertretbarem Aufwand zu behandelnden - Spezialfälle 1 und 3 untersuchen.

Setzen wir also G_1 und G_3 in (2.25) ein, so erhalten wir für D(u,z) einmal den bekannten Ausdruck

$$D_1(u,z) = \frac{R}{2\pi bzu} \sin\left\{2\pi zu\frac{b}{R} - \pi\lambda zu^2\right\} \tag{3.7a}$$

und (siehe Anhang II) - für $0 \leq u \leq \frac{2b}{\lambda R}$ - zum anderen

$$D_3(u,z) = \frac{4R}{\pi^3 bzu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2} \sin\left\{4n\pi zu\frac{b}{R} + \pi\lambda zu^2\right\}\right. \tag{3.7b}$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)} \sin\left\{4n\pi zu\frac{b}{R} - \pi\lambda zu^2\right\}\right\}.$$

Während bei der Berechnung von $D_1(u,z)$ der Integrationsbereich für $u \geq \frac{2b}{\lambda R}$ verschwindet, ist dies bei $D_3(u,z)$ keineswegs der Fall. Somit ist auch $D_3(u,z)$ dort nicht unbedingt Null, es tritt lediglich bei $u = \frac{2b}{\lambda R}$ ein Knick auf. Wir wollen jedoch unsere Betrachtungen auf den Bereich $0 \leq u \leq \frac{2b}{\lambda R}$ beschränken, nur hier würden wir ja im Experiment aufgrund unserer a priori-

Kenntnisse über die Übertragungsfunktion untersuchen.

Für die Grenzen $z \to 0$ bzw. $u \to 0$ gehen $D_1(u,z)$ und $D_3(u,z)$ zwar ineinander über

$$\lim_{z\to 0} D_1(u,z) = \lim_{z\to 0} D_3(u,z) = 1 - \frac{\lambda R}{2b} u \tag{3.8}$$

und $$\lim_{u\to 0} D_1(u,z) = \lim_{u\to 0} D_3(u,z) = 1 ,$$

jedoch auch für $u = \frac{2b}{\lambda R}$ ist $D_1 \neq D_3$, es ist

$$D_1(\tfrac{2b}{\lambda R}, z) = 0 \tag{3.9}$$

und $$D_3(\tfrac{2b}{\lambda R}, z) = \frac{4\lambda R^2}{\pi^3 z b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \sin\left\{4\pi(2n-1)\,\frac{zb^2}{\lambda R^2}\right\},$$

wie bereits oben angedeutet (zur Berechnung siehe ebenfalls Anhang II).

3.2. Das Schmetterlingsdiagramm

In [9] wird nun das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2.25) herangezogen, um die Relation zwischen Pupillenfunktion und Intensität im Brennraum auf eine neue Art und Weise zu veranschaulichen.

Mit (2.23) ist die Intensitätsverteilung des Punktbildes im Brennraum gegeben durch

$$d(\underline{x},z) = K(\underline{x},z)\, K^*(\underline{x},z) \tag{3.10}$$

$$= |\text{const.}|^2 \iint_{\underline{\xi}\,\underline{\xi}'} G(\underline{\xi})\, G^*(\underline{\xi}')\, \exp\left\{-2\pi i\left[\underline{x}\,\frac{\underline{\xi}-\underline{\xi}'}{\lambda R} + z\,\frac{\underline{\xi}^2-\underline{\xi}'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\underline{\xi}\, d\underline{\xi}' .$$

Beschränken wir uns nun vorerst wiederum auf das eindimensionale

Problem, d.h. untersuchen wir eine in η-Richtung unendlich ausgedehnte Zylinderlinse, so vereinfacht sich (3.10) zu

$$d(x,z) = |\text{const.}|^2 \iint_{\xi\,\xi'} G(\xi)\, G^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i\left[x\,\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi' \qquad (3.11)$$

Durch Einführung neuer Integrationsvariabler

$$\frac{\xi - \xi'}{\lambda R} = u \qquad \xi = \frac{R}{2}\left(u\lambda + \frac{2w}{u}\right)$$

bzw. (3.12)

$$\frac{\xi^2 - \xi'^2}{2\lambda R^2} = w \qquad \xi' = \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} - u\lambda\right)$$

und somit mit der Funktionaldeterminante

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi'}{\partial u} & \frac{\partial \xi'}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{R^2\lambda}{u}$$

gewinnen wir aus (3.10) das zweifache Fourierintegral

$$d(x,z) = |\text{const.}|^2 \cdot R^2\lambda \iint_{u\,w} F(u,w) \exp\left\{-2\pi i\left[xu + zw\right]\right\} du\, dw \qquad (3.13)$$

mit $F(u,w) = G\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} + u\lambda\right)\right\} G^*\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} - u\lambda\right)\right\} \cdot \frac{1}{|u|}$,

d.h. die Intensitätsverteilung im Brennraum läßt sich als Fouriertransformierte einer Funktion $F(u,w)$ aus einem (u,w)-Raum darstellen. Eine ausführliche, allerdings nur primär den Schritt $G \rightarrow F$ untersuchende, Diskussion finden wir in [9]. Wir wollen hier lediglich zur Veranschaulichung das Bild einer eindimensionalen Pupille (-b ... +b) im (u,w)-Raum betrachten.

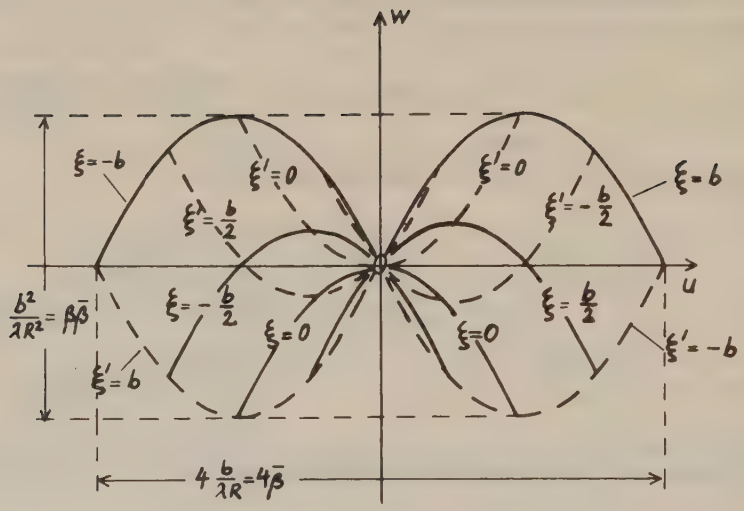


Fig. 4: Bild der eindim. Pupille im (u,w)-Raum (nach [9]); $\beta = \frac{b}{R}$, $\bar{\beta} = \frac{b}{\lambda R}$

Wegen der charakteristischen Gestalt der Kurven in Fig. 4 wurde dem Diagramm in [9] der Name "Schmetterlingsdiagramm" gegeben.

Wie der Definition F(u,w) und auch Fig. 4 zu entnehmen ist, ist - was für unsere Untersuchungen später von Wichtigkeit sein wird -

$$F(u,w) = F^*(-u,-w), \qquad (3.14)$$

d.h. die gesamte zur Bildung von d(x,z) notwendige Information ist bereits im halben Schmetterlingsdiagramm enthalten, und zwar in jeweils 2 benachbarten Quadranten des (u,w)-Raums.

Im zweidimensionalen Fall ist - wie in [9] ebenfalls bereits angedeutet - Gleichung (3.10) zur Gewinnung einer analogen

Transformationsformel nicht hinreichend, da $G(\xi)\ G^*(\xi')$ nunmehr eine von 4 Variablen abhängige Größe ist, die Form des Exponentialausdrucks jedoch keine vierfache Fouriertransformation zuläßt. Dazu benötigen wir vielmehr eine Beziehung der Form

$$d(x,y,z,z') = |\text{const.}|^2 \int_{\xi}\int_{\eta}\int_{\xi'}\int_{\eta'} G(\xi,\eta)\ G^*(\xi',\eta') \cdot \qquad (3.15)$$
$$\cdot \exp\left\{-2\pi i\left[x\,\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + y\,\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} + z'\,\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi'\, d\eta\, d\eta',$$

d. h. zur Defokussierung z (entsprechend w_{20} in der üblichen Nomenklatur als Bildfehlerkoeffizient) ist noch Astigmatismus, beschrieben durch $w_{22} \sim z'-z$ hinzuzunehmen. [13]

Über die effektive Bedeutung von $d(x,y,z,z')$ sagt Gleichung (3.15) in der vorliegenden Form noch nicht sehr viel aus; setzen wir jedoch

$$z' = z + z''$$

und trennen wir

$$\exp\left\{-2\pi i z''\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right\} = \exp\left\{-2\pi i z''\frac{\eta^2}{2\lambda R^2}\right\}\exp\left\{2\pi i z''\frac{\eta'^2}{2\lambda R^2}\right\}$$

vom Exponentialausdruck in (3.15) ab, so können wir $G(\xi,\eta)\exp\left\{-2\pi i z''\frac{\eta^2}{2\lambda R^2}\right\}$ zu einer neuen Pupillenfunktion $G'(\xi,\eta)$ zusammenfassen. Dann liefert

$$d(x,y,z;z'') = |\text{const.}|^2 \int_{\xi}\int_{\eta}\int_{\xi'}\int_{\eta'} G'(\xi,\eta)\ G'^*(\xi',\eta') \cdot \qquad (3.15a)$$
$$\cdot \exp\left\{-2\pi i\left[x\,\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + y\,\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2+\eta^2-\xi'^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi'\, d\eta\, d\eta'$$

die Meßvorschrift für $d(x,y,z,z') \equiv d(x,y,z;z'')$:

Nach (3.15a) ist $d(x,y,z;z'')$ die Intensität in einem um z defokussierten Punktbild, das von einer durch G' beschriebenen beugenden Struktur entworfen wird. Da aber der Ausdruck $\exp\left\{-2\pi i z''\frac{\eta^2}{2\lambda R^2}\right\}$ die Wirkung einer in die Pupillenebene in Richtung der ξ-Achse eingebrachten Zylinderlinse beschreibt, haben wir bei unseren Messungen zusätzlich zur Defokussierung entsprechende Zylinderlinsen verschiedener Brennweite dem Objektiv vorzusetzen. Der Astigmatismus schiefer Bündel dürfte in diesem Zusammenhang nur begrenzt

verwendbar sein, da hier i.a. sehr bald Vignettierung zu erwarten ist.

Greifen wir für die weitere Untersuchung nunmehr wieder auf Gleichung (3.15) zurück, so sind die neuen Variablen diesmal gegeben durch

$$t = \frac{\xi - \xi'}{\lambda R} \qquad \xi = \frac{R}{2}\left(\frac{2v}{t} + t\lambda\right)$$

$$u = \frac{\eta - \eta'}{\lambda R} \qquad \xi' = \frac{R}{2}\left(\frac{2v}{t} - t\lambda\right)$$

bzw. (3.16)

$$v = \frac{\xi^2 - \xi'^2}{2\lambda R^2} \qquad \eta = \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} + u\lambda\right)$$

$$w = \frac{\eta^2 - \eta'^2}{2\lambda R^2} \qquad \eta' = \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} - u\lambda\right) ;$$

die Funktionaldeterminante ist

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi'}{\partial t} & \frac{\partial \xi'}{\partial u} & \frac{\partial \xi'}{\partial v} & \frac{\partial \xi'}{\partial w} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial w} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} & \frac{\partial \eta'}{\partial u} & \frac{\partial \eta'}{\partial v} & \frac{\partial \eta'}{\partial w} \end{vmatrix} = -\frac{R^4\lambda^2}{tu} . \qquad (3.17)$$

Die Transformationsgleichung lautet also

$$d(x,y',z,z') = |\text{const.}|^2 R^4 \lambda^2 \int_t \int_u \int_v \int_w F(t,u,v,w) \cdot \cdot \exp\left\{-2\pi i \left[xt + y'u + zv + z'w\right]\right\} dt\,du\,dv\,dw \qquad (3.18)$$

mit

$$F(t,u,v,w) = G\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2v}{t} + t\lambda\right), \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} + u\lambda\right)\right\} \cdot G^*\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2v}{t} - t\lambda\right), \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} - u\lambda\right)\right\} \cdot \frac{1}{|t.u|} \cdot$$

Die Punktbildintensität im Brennraum bei Vorhandensein von Astigmatismus $d(x,y,z,z')$ kann also jetzt durch eine vierfache Fouriertransformation aus einem (t,u,v,w)-Raum gewonnen werden; die reine Defokussierung ($z = z'$ bzw. $R = R'$) ist davon lediglich ein Spezialfall. Auch hier enthält der halbe (t,u,v,w)-Raum bereits die gesamte Information.

3.3. Allgemeine Lösung des Phasenproblems

Die eindeutige Umkehrbarkeit jeder Fouriertransformation gestattet es nun in umgekehrter Richtung, aus (3.14) bzw. (3.18) durch Fourierumkehr die Pupillenfunktion $G(\underset{\sim}{\xi})$, d.h. vorerst das - allerdings dann z.B. durch Tabellenverfahren leicht zu*) trennende - Produkt $G(\underset{\sim}{\xi})\, G^*(\underset{\sim}{\xi}')$ zu bestimmen. Es ist im eindimensionalen Fall

$$G\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} + u\lambda\right)\right\} G^*\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u} - u\lambda\right)\right\} \cdot \frac{1}{|u|} \qquad (3.19)$$

$$= \frac{1}{|\text{const.}|^2 R^2 \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d(x,z) \exp\left\{2\pi i \left[ux + wz\right]\right\} dx\,dz$$

bzw. nach Wiedereinführung der alten Koordinaten ξ und ξ'

*) Siehe Anhang V.

$$G(\xi)G^*(\xi') = \frac{|\xi-\xi'|}{|const.|^2 R^3\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d(x,z)\, \exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}x + \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z\right]\right\} dx\,dz$$

$$= \frac{|\xi-\xi'|}{|const.|^2 R^3\lambda^2} \int_{z=-\infty}^{\infty}\left[\int_{x=-\infty}^{\infty} d(x,z)\, \exp\left\{2\pi i \frac{\xi-\xi'}{\lambda R}x\right\} dx\right] \cdot \exp\left\{2\pi i \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z\right\} dz \qquad (3.20)$$

$$= \frac{|\xi-\xi'|}{|const.|^2 R^3\lambda^2} \int_{z=-\infty}^{\infty} D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, z\right) \exp\left\{2\pi i \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z\right\} dz .$$

Da D i.a. bereits normiert vorliegt, empfiehlt es sich an dieser Stelle, die Normierungskonstante $|const.|^2$ zu bestimmen. Aus (2.11) und (2.13) gewinnen wir die Forderung

$$D(0) = |const.|^2 \int G(\lambda R w)\, G^*(\lambda R w)\, dw$$

$$= \frac{|const.|^2}{\lambda R} \int G(\xi)\, G^*(\xi)\, d\xi = 1 , \qquad (3.21)$$

es ist also

$$|const.|^2 = \frac{\lambda R}{\int G(\xi)\, G^*(\xi)\, d\xi} \qquad (3.22)$$

und somit (vgl. (2.10))

$$|const.|^2 = \frac{|const.|^2}{\lambda^2 R^2} = \frac{1}{\lambda R \int G(\xi)\, G^*(\xi)\, d\xi} . \qquad (3.23)$$

Setzen wir diesen Wert für $|\text{const.}|^2$ in (3.20) ein, so wird schließlich

$$\frac{G(\xi)G^*(\xi')}{\int G(\xi)G^*(\xi)\,d\xi} = \frac{|\xi-\xi'|}{\lambda R^2}\int_{z=-\infty}^{\infty} D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, z\right) \exp\left\{2\pi i \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} z\right\} dz \qquad (3.24)$$

$$= \hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi').$$

Da entsprechend dem im Anschluß an (3.14) gesagten mit der Beschränkung auf $u>0$ kein Informationsverlust verbunden ist, können wir für die Zukunft die Betragsstriche bei $|\xi-\xi'|$ weglassen und stillschweigend nur positive Werte von $u=\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}$ voraussetzen, für die ja $D(u,z)$ auch nur zu messen ist. Unter Berücksichtigung des in (5.5) angeführten Zusammenhanges $D(-u,z) = D^*(u,z)$ ist zudem sehr leicht zu zeigen, daß eine Beschränkung auf nur negative Werte von u auf dasselbe $\hat{G}(\xi)\,\hat{G}^*(\xi')$ führt.

Die analoge <u>zweidimensionale</u> Rücktransformation ist gegeben durch

$$G\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2v}{t}+t\lambda\right), \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u}+u\lambda\right)\right\} G^*\left\{\frac{R}{2}\left(\frac{2v}{t}-t\lambda\right), \frac{R}{2}\left(\frac{2w}{u}-u\lambda\right)\right\} \frac{1}{|tu|}$$

$$= \frac{1}{|\text{const.}|^2 R^4\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d(x,y',z,z') \cdot \qquad (3.25)$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i\left[tx+uy'+vz+wz'\right]\right\} dx\,dy'\,dz\,dz'$$

bzw. wiederum nach Einführung der alten Koordinaten ξ, η, ξ' und η'

$$G(\xi,\eta)G^*(\xi',\eta') = \frac{|(\xi-\xi')(\eta-\eta')|}{|\text{const.}|^2 R^6 \lambda^4} \iiiint d(x,y',z,z') \cdot \tag{3.26}$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}x + \frac{\eta-\eta'}{\lambda R}y' + \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z + \frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}z'\right]\right\} dx\,dy'\,dz\,dz'$$

und nach Durchführung der Fouriertransformation bezüglich $\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} \longleftrightarrow x$ und $\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} \longleftrightarrow y'$

$$G(\xi,\eta)G^*(\xi',\eta') = \frac{|(\xi-\xi')(\eta-\eta')|}{|\text{const.}|^2 R^6 \lambda^4} \iint D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, \frac{\eta-\eta'}{\lambda R}, z, z'\right) \cdot \tag{3.27}$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z + \frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}z'\right]\right\} dz\,dz' .$$

Die Normierungsbedingung

$$D(0,0) = |\text{const.}|^2 \iint G(\lambda R p, \lambda R q) G^*(\lambda R p, \lambda R q)\, dp\,dq \tag{3.28}$$

$$= \frac{|\text{const.}|^2}{\lambda^2 R^2} \iint G(\xi,\eta) G^*(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = 1$$

liefert diesmal

$$|\text{const.}|^2 = \frac{\lambda^2 R^2}{\iint G(\xi,\eta) G^*(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta} \tag{3.29}$$

und mit (2.10) in diesem Fall

$$|\text{const.}|^2 = \frac{|\text{const.}'|^2}{\lambda^4 R^4} = \frac{1}{\lambda^2 R^2 \iint G(\xi,\eta)\, G^*(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}\,. \qquad (3.30)$$

Die endgültige Transformationsgleichung lautet somit

$$\frac{G(\xi,\eta)\, G^*(\xi',\eta')}{\int G(\xi,\eta) G^*(\xi,\eta) d\xi\, d\eta} = \frac{|(\xi-\xi')(\eta-\eta')|}{\lambda^2 R^4} \iint D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, \frac{\eta-\eta'}{\lambda R}, z, z'\right)$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i \left[\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} z + \frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2} z'\right]\right\} dz\, dz' \qquad (3.31)$$

$$= \hat{G}(\xi,\eta)\hat{G}^*(\xi',\eta').$$

Auch hier sind in praxi $\xi-\xi'$ und $\eta-\eta'$ positive Größen, sodaß ebenfalls auf das Betragszeichen verzichtet werden kann.

3.4. Zwei Beispiele

Die Anwendung dieser Formeln sei nun anhand von Gleichung (3.24) an zwei Beispielen demonstriert. Dazu wollen wir einmal eine rein reelle Pupillenfunktion, nämlich die Spaltfunktion, und einmal eine komplexe Pupillenfunktion voraussetzen.

1) Spaltfunktion

Nach (3.7) ist (für $u>0$, d.h. für $\xi-\xi'>0$)

$$D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, z\right) = \frac{\lambda R^2}{2\pi z b(\xi-\xi')} \cdot \sin\left\{2\pi z\left[\frac{b(\xi-\xi')}{\lambda R^2} - \frac{(\xi-\xi')^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} . \tag{3.32}$$

Setzen wir dies nun in Gleichung (3.24) ein, so erhalten wir

$$\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi') = \frac{\xi-\xi'}{2\pi b(\xi-\xi')} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin az}{z} \exp\left\{2\pi i \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} z\right\} dz \tag{3.33}$$

$$\text{mit } a = \frac{2\pi}{2\lambda R^2}\left\{2b(\xi-\xi') - (\xi-\xi')^2\right\} \geq 0 .$$

Dies führt wiederum /8/ auf

$$\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi') = \frac{1}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{\sin az}{z} \cos\left\{2\pi \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} z\right\} dz$$

$$= \frac{1}{\pi b} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } 2\pi \frac{|\xi^2-\xi'^2|}{2\lambda R^2} < a \\ \left(\frac{\pi}{4} & \text{für } 2\pi \frac{|\xi^2-\xi'^2|}{2\lambda R^2} = a\right) \\ 0 & \text{für } 2\pi \frac{|\xi^2-\xi'^2|}{2\lambda R^2} > a \end{cases} . \tag{3.34}$$

Mit obigem Wert für a lauten die Bereichsabgrenzungen

$$2\pi \frac{|\xi^2-\xi'^2|}{2\lambda R^2} \lessgtr \frac{2\pi}{2\lambda R^2}\left\{2b(\xi-\xi') - (\xi-\xi')^2\right\}$$

bzw. $$(\xi-\xi')\left|\xi+\xi'\right| \lessgtr 2b(\xi-\xi') - (\xi-\xi')^2 \tag{3.35}$$

bzw. $$\left|\xi+\xi'\right| \lessgtr 2b - (\xi-\xi') .$$

Ist $\xi + \xi' > 0$ (entspr. w>0, vgl. Abb.4), so entspricht (3.35)

$$\xi + \xi' \lessgtr 2b - \xi + \xi'$$

d.h. $$\xi \lessgtr b . \tag{3.36}$$

Ist $\xi + \xi' < 0$ (entspr. $w<0$, vgl. wieder Abb.4), so ist jetzt

$$-\xi - \xi' \lessgtr 2b - \xi + \xi',$$

also

$$-\xi' \lessgtr b . \qquad (3.37)$$

Da mit $\xi - \xi' > 0$ bei $\xi + \xi' > 0$ nur ein positives ξ und bei $\xi + \xi' < 0$ nur ein negatives ξ' vereinbar ist (wie Fig. 4 zu entnehmen ist, sind im Bereich $u = \frac{\xi - \xi'}{\lambda R} \geq 0$ in der Tat nur der obere Rand der Pupille und der untere Rand der konjugierten Pupille vollständig abgebildet), können wir schließlich schreiben

$$\hat{G}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2b}} & \text{für } |\xi| < b \\ \left(\frac{1}{2\sqrt{b}} \text{ für } |\xi| = b\right) & \\ 0 & \text{für } |\xi| > b \end{cases} , \qquad (3.38)$$

also bis auf einen Normierungsfaktor gemäß (3.24) wiederum die Spaltfunktion. Eventuell vorhandene, über die Pupille konstante Phasenfaktoren können natürlich nicht erfaßt werden.

2) $\underline{G(\xi) = 1 + i\xi \quad \text{für} \quad -b \leq \xi \leq b}$

Als möglichst einfache komplexe Pupillenfunktion wurde die Funktion

$$G(\xi) = 1 + i\xi \text{ für } -b \leq \xi \leq +b \qquad (3.39)$$

gewählt. Die zugehörige OÜF $D(u,z)$ ergibt sich nach einiger Rechnung (siehe Anhang III) als

$$D(u,z) = \frac{3\lambda R}{2b^3+6b}\left\{\left[-\frac{R^2}{2\pi^3\lambda z^3u^3}+\frac{b^2+1}{\pi\lambda zu}-\frac{bR}{\pi z}+i\frac{R}{\pi z}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\sin\left[2\pi z\left(\frac{b}{R}u-\frac{\lambda}{2}u^2\right)\right] \qquad (3.40)$$

$$\left.+\left[\frac{bR}{\pi^2\lambda z^2u^2}-\frac{R^2}{2\pi^2z^2u}\right]\cos\left[2\pi z\left(\frac{b}{R}u-\frac{\lambda}{2}u^2\right)\right]\right\}.$$

Wir setzen diese OÜF wieder in (3.24) ein

$$\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi') = \frac{3(\xi-\xi')}{R(2b^3+6b)}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[-\frac{R^2}{2\pi^3\lambda z^3u^3}+\frac{b^2+1}{\pi\lambda zu}-\frac{bR}{\pi z}+i\frac{R}{\pi z}\right]\sin\left[2\pi z\left(\frac{b}{R}u-\frac{\lambda}{2}u^2\right)\right]\right. \qquad (3.41)$$

$$\left.+\left[\frac{bR}{\pi^2\lambda z^2u^2}-\frac{R^2}{2\pi^2z^2u}\right]\cos\left[2\pi z\left(\frac{b}{R}u-\frac{\lambda}{2}u^2\right)\right]\right\}\exp\{2\pi i zw\}\,dz$$

mit $u = \frac{\xi-\xi'}{\lambda R}$ und $w = \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}$, die diesmal der kürzeren Schreibweise wegen beibehalten werden sollen.

Da D(u,z) gerade in z ist, genügt die Berechnung von

$$\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi') = \frac{6(\xi-\xi')}{R(2b^3+6b)}\cdot$$

$$\cdot\int_{D}^{\infty}\left\{\left[-\frac{R^2}{2\pi^3\lambda z^3u^3}+\frac{b^2+1}{\pi\lambda zu}-\frac{bR}{\pi z}+i\frac{R}{\pi z}\right]\sin\left[2\pi z\left(\frac{b}{R}u-\frac{\lambda}{2}u^2\right)\right]\right. \qquad (3.42)$$

$$\left.+\left[\frac{bR}{\pi^2\lambda z^2u^2}-\frac{R^2}{2\pi^2z^2u}\right]\cos\left[2\pi z\left(\frac{b}{R}u-\frac{\lambda}{2}u^2\right)\right]\cos(2\pi zw)\,dz.\right.$$

Sofort integrierbar ist [8]:

$$\int_0^\infty \left(\frac{b^2+1}{\pi\lambda u} - \frac{bR}{\pi} + i\,\frac{R}{\pi}\right) \frac{\sin\left\{2\pi z\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\right\}}{z} \cos(2\pi zw)\,dz$$

$$= \left(\frac{b^2+1}{\pi\lambda u} - \frac{bR}{\pi} + i\,\frac{R}{\pi}\right) \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } |2\pi w| < 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right) \\ \left(\frac{\pi}{4}\right. & \left.\text{für } |2\pi w| = 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\right) \\ 0 & \text{für } |2\pi w| > 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right) \end{cases} . \tag{3.43}$$

Zur Berechnung des Restes

$$F = \int_0^\infty \left\{ -\frac{R^2}{2\pi^3\lambda u^3} \frac{\sin\left\{2\pi z\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\right\}}{z^3} + \left(\frac{bR}{\pi^2\lambda u^2} - \frac{R^2}{2\pi^2 u}\right) \frac{\cos\left\{2\pi z\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\right\}}{z^2} \right\} \cos(2\pi zw)\,dz, \tag{3.44}$$

in dem sowohl $\frac{\sin az}{z^3}$ als auch $\frac{\cos az}{z^2}$ für $z \to 0$ über alle

Grenzen wachsen, benutzen wir die Beziehungen [8]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} \cos(xy)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2b^2}\left(1 - e^{-ab}\cosh(by)\right) & \text{für } |y|<a \\ \frac{\pi}{2b^2} e^{-by}\sinh(ab) & \text{für } |y|>a \end{cases}$$

und (3.45)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2} \cos(xy)\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2b} e^{-ab}\cosh(by) & \text{für } |y|<a \\ \frac{\pi}{2b} e^{-by}\cosh(ab) & \text{für } |y|>a \end{cases} .$$

Es ist $$F = \lim_{b\to 0} \int_0^\infty \left\{ -\frac{R^2}{2\pi^3\lambda u^3}\,\frac{\sin az}{z(z^2+b^2)} + \left[\frac{bR}{\pi^2\lambda u^2} - \frac{R^2}{2\pi^2 u}\right]\frac{\cos az}{z^2+b^2}\right\}\cos(2\pi zw)\,dz \qquad (3.46)$$

mit $$a = 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right),$$

sowohl für $|2\pi w| < a$ als auch für $|2\pi w| > a$ ein längerer unbestimmter Ausdruck der Form 0/0, der durch zweimalige Anwendung der Bernoulli - l'Hospitalschen Regel zu lösen ist. Dies führt zu

$$F = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left\{\frac{R^2w^2}{\pi\lambda u^3} + \frac{bR}{\pi} - \frac{R^2\lambda u}{4\pi} - \frac{b^2}{\pi\lambda u}\right\} & \text{für } |2\pi w| < a \\ 0 & \text{für } |2\pi w| > a \end{cases} . \qquad (3.47)$$

Schließlich ist somit

$$\hat{G}(\xi)\,\hat{G}^*(\xi') = \begin{cases} \frac{3(\xi-\xi')}{2b^3+6b}\left\{\frac{1}{\lambda Ru} + i + \frac{Rw^2}{\lambda u^3} - \frac{R\lambda u}{4}\right\} & \text{für } |2\pi w| < a \\ 0 & \text{für } |2\pi w| > a \end{cases} \qquad (3.48)$$

bzw. nach Einsetzen von $u = \frac{\xi - \xi'}{\lambda R}$ und $w = \frac{\xi^2 - \xi'^2}{2\lambda R^2}$

$$\hat{G}(\xi)\,\hat{G}^*(\xi') = \begin{cases} \frac{3}{2b^3+6b}\left\{1 + i(\xi-\xi') + \xi\xi'\right\} & \text{für } |2\pi w| < a \\ 0 & \text{für } |2\pi w| > a \end{cases} \qquad (3.49)$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2b^3+6b}\left\{(1+i\xi)(1-i\xi')\right\} & \text{für } |2\pi w| < 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right) \\ & \text{für } |2\pi w| > 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right) \end{cases}$$

Eine Diskussion der Abschätzung $|2\pi w| \lesseqgtr 2\pi\left(\frac{b}{R}u - \frac{\lambda}{2}u^2\right)$ erübrigt sich, da dies bereits in (3.35) bis (3.37) geschehen ist.

Nach den bisherigen Überlegungen sieht es vorerst so aus, als ob zur Rekonstruktion der Amplituden- und Phasenstruktur des beugenden Objekts im eindimensionalen Fall die Kenntnis der OÜF von der Defokussierung $-\infty$ bis zur Defokussierung $+\infty$ nötig wäre. Im (realen) zweidimensionalen Fall schaut die Sache vollends vollkommen hoffnungslos aus, da hier ja nicht einmal das genügt. Glücklicherweise lassen sich jedoch, wie in Kapitel 4 gezeigt wird, eine ganze Reihe Spezialfälle mehr oder weniger auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Und auch für diesen läßt sich - insbesondere durch Anwendung des Samplingtheorems - die Anzahl der durchzuführenden Messungen wesentlich einschränken (siehe Kapitel 5).

4. Einige Spezialfälle

Während im allgemeinen zweidimensionalen Fall auf die Untersuchung der OÜF mit Defokussierung und Astigmatismus nicht verzichtet werden kann, lassen sich in einigen z.T. sehr wichtigen Spezialfällen doch z.B. aufgrund von Symmetrieeigenschaften die Forderungen so weit einschränken, daß zumindest auf die Messung mit Astigmatismus verzichtet werden kann. Es ist dabei von besonderem Vorteil, daß die hierzu teilweise notwendigen Integrationen über die x- bzw. y-Achse im Bildraum in praxi der Abtastung des Punktbildes mit einem Meßspalt beziehungsweise den üblichen Methoden zur Messung der OÜF entsprechen (z.B. Ingelstam - Lindberg - Verfahren), Theorie und Experiment also zudem noch einander angepaßt werden.

4.1. Nur von einem Parameter abhängige Pupillenfunktionen

Wir betrachten den Spezialfall

$$G(\xi,\eta) = G(\xi), \qquad (4.1)$$

also die in Abb. 5 skizzierten Verhältnisse. Die Pupillenberandung werde oberhalb der ξ-Achse durch $f_2(\xi)$, unterhalb durch $f_1(\xi)$ beschrieben.

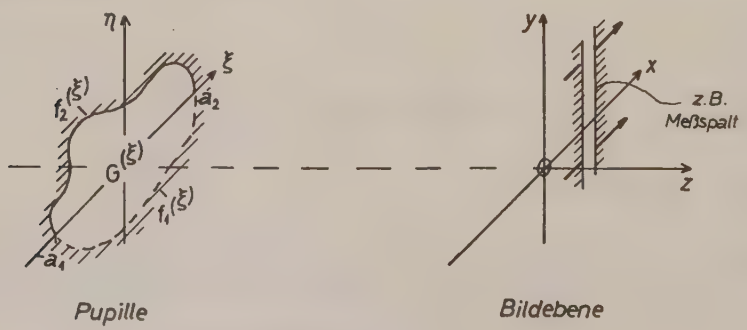


Fig. 5: Eindimensionaler Spezialfall

Für z = z', bzw. R = R', d.h. bereits unter Voraussetzung des Verzichts auf Astigmatismus ist die Punktbildintensität nach (3.15) gegeben durch

$$d(x,y,z) = |\text{const.}|^2 \int_{\xi=-a_1}^{a_2} \int_{\eta=f_1(\xi)}^{f_2(\xi)} \int_{\xi'=-a_1}^{a_2} \int_{\eta'=f_1(\xi')}^{f_2(\xi')} G(\xi)\, G^*(\xi') \cdot \exp\left\{-2\pi i \left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + y\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} + z\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi'\, d\eta\, d\eta'; \tag{4.2}$$

die eigentlich einen Bestandteil der Pupillenfunktion bildenden Pupillenberandungen sind hier der besseren Übersicht wegen in etwas inkorrekter Weise als Integrationsgrenzen angeführt.

Integrieren wir nun über y, d.h. gehen wir über zur "line spread function" (in diesem Fall ist Astigmatismus sowieso sinnlos)

$$\tilde{d}(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z)\,dy\,, \tag{4.3}$$

so können wir nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge diese Integration unter dem Integral sofort durchführen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,z) &= \ldots \int_{y=-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \exp\left\{-2\pi i y \frac{\eta-\eta'}{\lambda R}\right\} dy \ldots \\ &= \ldots \lambda R \int_{\bar{y}=-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \exp\left\{-2\pi i \bar{y}(\eta-\eta')\right\} d\bar{y} \ldots \\ &= \ldots \lambda R\, \delta(\eta'-\eta) \ldots,\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei $\delta(\eta'-\eta)$ die Diracsche Deltafunktion ist.

Bei der nunmehr folgenden Integration über η und η' ist, da

beide Variable nicht von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, besondere Vorsicht geboten.

Führen wir vorerst einmal die (später noch zu spezifizierende) Abkürzung

$$C(\xi,\xi') = \int_{\eta=f_1(\xi)}^{f_2(\xi)} \int_{\eta'=f_1(\xi')}^{f_2(\xi')} \exp\left\{-2\pi i z \frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right\} \delta(\eta'-\eta)\, d\eta\, d\eta' \tag{4.5}$$

ein, so ist nunmehr

$$\tilde{d}(x,z) = |\text{const.}|^2 \lambda R \int_{\xi=-a_1}^{a_2} \int_{\xi'=-a_1}^{a_2} G(\xi)\, G^*(\xi')\, C(\xi,\xi') \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{-2\pi i \left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi', \tag{4.6}$$

d.h. nach Rücktransformation gemäß (3.20) bzw. (3.24) und Einsetzen der Konstanten (3.30)

$$\hat{G}(\xi)\,\hat{G}^*(\xi') = \frac{G(\xi)G^*(\xi')}{\iint G(\xi)G^*(\xi)\,d\xi\,d\eta} \tag{4.7}$$
$$= \frac{|\xi-\xi'|}{\lambda R^2 C(\xi,\xi')} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{d}(x,z) \exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}x + \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z\right]\right\} dx\,dz$$
$$= \frac{|\xi-\xi'|}{\lambda R^2 C(\xi,\xi')} \int_{-\infty}^{\infty} D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, 0; z\right) \exp\left\{2\pi i \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} z\right\} dz;$$

denn es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{d}(x,z) \exp\{2\pi i u x\}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z) \exp\{2\pi i u x\}\, dx\,dy \tag{4.8}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z) \exp\{2\pi i [ux+vy]\}\, dx\,dy \quad \text{für } v=0.$$

Die Betragszeichen von $|\xi - \xi'|$ können bei der praktischen Rechnung wieder weggelassen werden.

Es bleibt also abschließend die Aufgabe, aus unserer a priori-Kenntnis über die Pupillenform die Größe $C(\xi,\xi')$ zu bestimmen, sozusagen einen Pupillenformfaktor. Dazu betrachten wir Fig. 6. Dort ist zweimal die Pupille gezeichnet, einmal in der (ξ,η)-Ebene, einmal in der (ξ',η')-Ebene; 1 und 2 bezeichnen die zu 2 ξ,ξ'-Paaren gehörigen Integrationsbereiche.

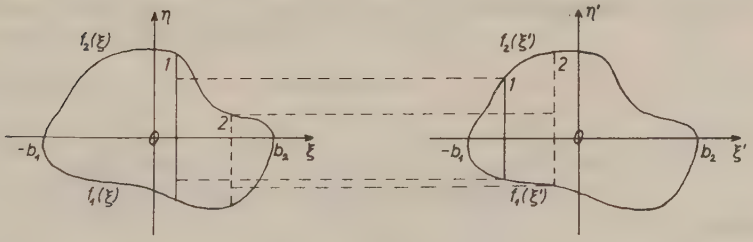


Fig. 6: Zur Berechnung des Formfaktors $C(\xi,\xi')$

Bekanntlich [20] ist

$$\int_b^c f(t)\,\delta(t - t_o)\,dt = \begin{cases} f(t_o) & \text{für } b < t_o < c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (4.9)$$

Somit ist

$$C(\xi,\xi') = \int_{\eta = f_1(\xi)}^{f_2(\xi)} \int_{\eta' = f_1(\xi')}^{f_2(\xi')} \exp\left\{-2\pi i z \frac{\eta^2 - \eta'^2}{2\lambda R^2}\right\} \delta(\eta' - \eta)\,d\eta'\,d\eta$$

$$= \int_{\eta = f_1(\xi)}^{f_2(\xi)} \begin{cases} 1 & \text{für } f_1(\xi') < \eta < f_2(\xi') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} d\eta \qquad (4.10)$$

$$= \text{Min}\left\{f_2(\xi), f_2(\xi')\right\} - \text{Min}\left\{f_1(\xi),\ f_1(\xi')\right\},$$

wobei mit Min $\{a,b\}$ der dem Betrag nach kleinere der beiden Werte a und b gemeint ist.
Im Fall der beiden ξ,ξ'-Kombinationen von Fig. 6 ist

$$C_1(\xi,\xi') = f_2(\xi') - f_1(\xi')$$
$$\text{und} \qquad C_2(\xi,\xi') = f_2(\xi) - f_1(\xi'). \qquad (4.11)$$

Betrachten wir nun als Beispiel eine kreisförmige Pupille vom Radius a (Fig. 7), so ist hier

$$C(\xi,\xi') = \left\{\begin{array}{ll} 2\sqrt{a^2-\xi^2} & \text{für } |\xi| \geq |\xi'| \\ 2\sqrt{a^2-\xi'^2} & \text{für } |\xi| \leq |\xi'| \end{array}\right\}^{*)}, \qquad (4.12)$$

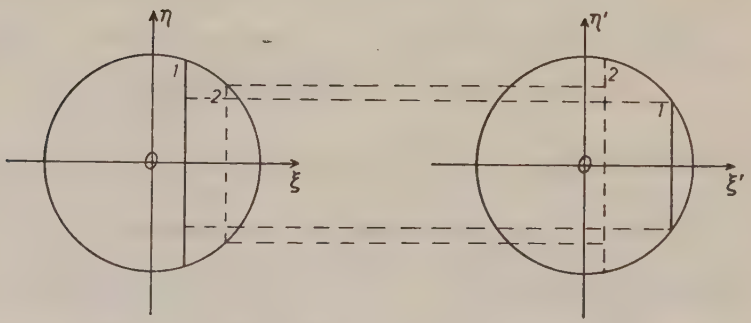


Fig. 7: Formfaktor bei kreisförmiger Pupille

und im Fall einer rechteckigen Pupille (Länge 2a in ξ-Richtung

*) Setzen wir übrigens dieses $C(\xi,\xi')$ in (4.6) ein und setzen wir $G(\xi) = G^*(\xi') = 1$, so werden wir tatsächlich auf die "line spread function" für die ideale kreisförmige Pupille $\frac{H_1(t)}{t^2}$ geführt (H_1 = Struve-Funktion 1. Ordnung).

und Länge 2b in η-Richtung) ist schließlich

$$C(\xi,\xi') = 2b \,. \qquad (4.13)$$

Natürlich kann auch direkt in Gleichung (4.2) über η und η' integriert werden; eine Überführung in eine zweifache Fouriertransformation ist jedoch nur dann möglich, wenn diese Integration zu einer Funktion $g(\xi,\xi',z,y)$ führt, die gemäß $g(\xi,\xi',z,y) = g_1(\xi,\xi') \cdot g_2(z)$ separierbar ist. Da dies bei von ξ bzw. ξ' abhängigen Integrationsgrenzen i.a. nicht der Fall ist, wollen wir uns hier auf den einzigen Fall beschränken, bei dem dies garantiert möglich ist, nämlich den der rechteckigen Pupille. Wir werden dabei gleichzeitig sehen, daß wir auf diese Weise ansonsten zu den wesentlich unhandlicheren Formeln geführt werden.

Durchzuführen ist die Integration

$$\begin{aligned} &\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} \exp\left\{-2\pi i\left[y\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\eta' d\eta \\ &= \int_{-b}^{b} \exp\left\{-2\pi i\left[y\frac{\eta}{\lambda R} + z\,\frac{\eta^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\eta \int_{-b}^{b} \exp\left\{2\pi i\left[y\frac{\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\eta' \\ &= E_1(y,z)\, E_2(y,z)\,, \end{aligned} \qquad (4.14)$$

also die beiden Fresneltransformationen E_1 und E_2.
Diese ergeben [23, 24]

$$\begin{aligned} E_1(y,z) = \sqrt{\frac{\lambda R^2}{2z}}\, \exp\left\{i\,\frac{\pi y^2}{\lambda z}\right\} \cdot \\ \cdot \left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR+zb}{R}\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR+zb}{R}\right)\right. \\ \left. - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR-zb}{R}\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR-zb}{R}\right)\right] \end{aligned} \qquad (4.15a)$$

und

$$E_2(y,z) = \sqrt{\frac{\lambda R^2}{2z}}\, \exp\left\{-i\,\frac{\pi y^2}{\lambda z}\right\} \cdot \left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR+zb}{R}\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR+zb}{R}\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR-zb}{R}\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR-zb}{R}\right)\right], \tag{4.15b}$$

worin C(t) und S(t) die Fresnelschen Integrale

$$C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \tag{4.16}$$

und

$$S(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

bedeuten.

Das Produkt E_1E_2 wird somit

$$E_1(y,z)\,E_2(y,z) = \frac{\lambda R^2}{2z}\left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR+zb}{R}\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR-zb}{R}\right)\right]^2 + \frac{\lambda R^2}{2z}\left[S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR+zb}{R}\right) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\,\frac{yR-zb}{R}\right)\right]^2. \tag{4.17}$$

Da E_1E_2 von ξ und ξ' unabhängig ist, kann es in (4.2) vor das Integral gezogen werden, und es wird

$$d(x,y,z) = d_1(x,z)\,d_2(y,z) = |\text{const.}|^2\, E_1(y,z)\,E_2(y,z) \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G(\xi)G^*(\xi') \cdot \exp\left\{-2\pi i\left[x\,\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi', \tag{4.18}$$

d.h. nach Einsetzen der Konstanten $|\text{const.}|^2$ (siehe 3.30)

$$d(x,y,z) = d_1(x,z)\,d_2(y,z) =$$

$$= \frac{E_1(y,z)\,E_2(y,z)}{\lambda R \int G(\xi) G^*(\xi) d\xi \cdot \lambda R \int d\eta} \cdot$$

$$\cdot \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G(\xi)\, G^*(\xi')\, \exp\left\{-2\pi i \left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi'$$

$$= \frac{1}{\lambda R \int G(\xi) G^*(\xi) d\xi} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G(\xi)\, G^*(\xi')\, \exp\left\{-2\pi i \left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi' \cdot$$

$$\cdot \frac{E_1(y,z)\;E_2(y,z)}{2b\lambda R} \cdot \qquad (4.19)$$

Nach Separation von d(x,y,z) ist wiederum die Fourierumkehr von

$$d_1(x,z) = \frac{1}{\lambda R \int G(\xi) G^*(\xi) d\xi} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G(\xi) G^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i \left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi' \qquad (4.20)$$

möglich; da jedoch nur im Fall der rechteckigen Pupille die Separation derartig einfach ist, ist i.a. der Weg über die "line spread function" vorzuziehen.

4.2. Separierbare Koordinaten; $G(\xi,\eta) = G_1(\xi) \cdot G_2(\eta)$.

Die in 4.1 behandelte Art der Pupillenfunktion ist nur der Grenzfall einer Pupillenfunktion mit separierbaren Koordinaten gemäß

$$G(\xi,\eta) = G_1(\xi) \cdot G_2(\eta) \qquad (4.21)$$

mit $G_2(\eta) = 1$. Entsprechend sind auch die Versuche zur Lösung des jetzigen Problems anzusetzen.

Am einfachsten ist wieder der Fall einer rechteckigen Pupille. Es ist

$$d(x,y,z) = |\text{const.}|^2 \int_{\xi=-a}^{a}\int_{\xi'=-a}^{a}\int_{\eta=-b}^{b}\int_{\eta'=-b}^{b} G_1(\xi)\, G_2(\eta)\, G_1^*(\xi')\, G_2^*(\eta')$$

$$\cdot \exp\left\{-2\pi i\left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + y\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2} + z\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi'\, d\eta\, d\eta'$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 R^2 \int_{-a}^{a} G_1(\xi) G_1^*(\xi)\, d\xi \int_{-b}^{b} G_2(\eta) G_2^*(\eta)\, d\eta} \cdot$$

$$\cdot \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G_1(\xi) G_1^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i\left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\, d\xi' \cdot$$

$$\cdot \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} G_2(\eta) G_2^*(\eta') \exp\left\{-2\pi i\left[y\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\eta\, d\eta'$$

$$= d_1(x,z)\, d_2(y,z) \,, \qquad (4.22)$$

nach Separation von d können also $d_1(x,z)$ und $d_2(y,z)$ in gewohnter Weise zurücktransformiert werden.

Ist diese Separation mit Schwierigkeiten verbunden oder liegen experimentelle Gründe vor, so kann auch hier wiederum zur "line spread function" übergegangen werden. Integrieren wir die Punktbildintensität zuerst über y, so ist

$$\tilde{d}_1(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z)\,dy$$

$$= \frac{1}{\lambda R \int_{-a}^{a} G_1(\xi) G_1^*(\xi)\,d\xi \int_{-b}^{b} G_2(\eta) G_2^*(\eta)\,d\eta}$$

$$\cdot \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G_1(\xi) G_1^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i\left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\,d\xi'$$

$$\cdot \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} G_2(\eta) G_2^*(\eta') \exp\left\{-2\pi i z\,\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right\} \delta(\eta'-\eta)\,d\eta'\,d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda R \int_{-a}^{a} G_1(\xi) G_1^*(\xi)\,d\xi \int_{-b}^{b} G_2(\eta) G_2^*(\eta)\,d\eta}$$

$$\cdot \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G_1(\xi) G_1^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i\left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\,d\xi'$$

$$\cdot \int_{-b}^{b} G_2(\eta) G_2^*(\eta)\,d\eta$$

$$= d_1(x,z)\,.$$

(4.23)

Analog ist

$$\tilde{d}_2(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z)dx = d_2(y,z), \qquad (4.24)$$

die Rücktransformation kann in beiden Fällen in gewohnter Art und Weise erfolgen.

Wesentlich komplizierter ist der Fall einer beliebigen Pupillenberandung. Eine vollständige Separation ist nicht möglich; dies ist leicht verständlich, wenn die Pupillenberandung korrekter Weise wieder in die Pupillenfunktion miteinbezogen wird. Dann ist die Aufspaltung $G(\xi,\eta) = G_1(\xi)\, G_2(\eta)$ nicht mehr durchzuführen.

Die Pupillenberandung werde wieder durch $f_1(\xi)$ unterhalb und $f_2(\xi)$ oberhalb der ξ-Achse bzw. $g_1(\eta)$ links und $g_2(\eta)$ rechts der η-Achse beschrieben. Ansonsten sei jedoch $G(\xi,\eta) = G_1(\xi)\, G_2(\eta)$. Dann ist

$$d(x,y,z) = |\text{const.}|^2 \int_{\xi=-a_1}^{a_2} \int_{\xi'=-a_1}^{a_2} G_1(\xi)\, G_1^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i\left[x\,\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\}$$

$$\cdot \int_{\eta=f_1(\xi)}^{f_2(\xi)} \int_{\eta'=f_1(\xi')}^{f_2(\xi')} G_2(\eta)\, G_2^*(\eta') \exp\left\{-2\pi i\left[y\,\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\eta'\, d\eta\, d\xi'\, d\xi \qquad (4.25)$$

$$= |\text{const.}|^2 \int_{\eta=-b_1}^{b_2} \int_{\eta'=-b_1}^{b_2} G_2(\eta)\, G_2^*(\eta') \exp\left\{-2\pi i\left[y\,\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\}$$

$$\cdot \int_{\xi=g_1(\eta)}^{g_2(\eta)} \int_{\xi'=g_1(\eta')}^{g_2(\eta')} G_1(\xi)\, G_1^*(\xi') \exp\left\{-2\pi i\left[x\,\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi'\, d\xi\, d\eta'\, d\eta.$$

Integration über y im 1. Fall bzw. x im 2. Fall führt zu

$$\tilde{d}_1(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z)\,dy$$

$$= \frac{1}{\lambda R \iint G_1(\xi) G_1^*(\xi) G_2(\eta) G_2^*(\eta)\,d\eta\,d\xi} \iint_{\substack{\xi=-a_1 \\ \xi'=-a_1}}^{\substack{a_2\,a_2 \\ \min\{f_1(\xi),f_1(\xi')\}}} G_1(\xi) G_1^*(\xi') \cdot \int_{\min\{f_2(\xi),f_2(\xi')\}}^{a_2} G_2(\eta) G_2^*(\eta)\,d\eta \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-2\pi i\left[x\frac{\xi-\xi'}{\lambda R} + z\,\frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\xi\,d\xi' \qquad (4.26)$$

und

$$\tilde{d}_2(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} d(x,y,z)\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda R \iint G_1(\xi) G_1^*(\xi) G_2(\eta) G_2^*(\eta)\,d\eta\,d\xi} \iint_{\substack{\eta=-b_1 \\ \eta'=-b_1}}^{\substack{b_2\,b_2 \\ \min\{g_1(\eta),g_1(\eta')\}}} G_2(\eta) G_2^*(\eta') \int_{\min\{g_2(\eta),g_2(\eta')\}}^{b_2} G_1(\xi) G_1^*(\xi)\,d\xi \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-2\pi i\left[y\frac{\eta-\eta'}{\lambda R} + z\,\frac{\eta^2-\eta'^2}{2\lambda R^2}\right]\right\} d\eta\,d\eta'$$

(Definition von $\min\{a,b\}$ siehe Gleichung (4.10)).

Durch Fourierumkehr gewinnen wir hieraus 2 Beziehungen der Form

$$\hat{G}_1(\xi)\hat{G}_1^*(\xi') \int_{\min\{f_1(\xi),f_1(\xi')\}}^{\min\{f_2(\xi),f_2(\xi')\}} \hat{G}_2(\eta)\hat{G}_2^*(\eta)\,d\eta = A(\xi,\xi')$$

und (4.27)

$$\hat{G}_2(\eta)\hat{G}_2^*(\eta') \int_{\min\{g_1(\eta),g_1(\eta')\}}^{\min\{g_2(\eta),g_2(\eta')\}} \hat{G}_1(\xi)\hat{G}_1^*(\xi)\,d\xi = B(\eta,\eta'),$$

worin uns A, B und die jeweiligen Integrationsgrenzen bekannt sind.

Setzen wir in (4.27) $\xi = \xi'$ und $\eta = \eta'$, so erhalten wir zwar ein Gleichungssystem zur Bestimmung von $\hat{G}_1(\xi)\ \hat{G}_1^*(\xi)$ und $\hat{G}_2(\eta)\ \hat{G}_2^*(\eta)$, die Lösung dieses gekoppelten, nichtlinearen Integralgleichungssystems dürfte sich jedoch sehr schwierig gestalten. Meist liegen jedoch Informationen über das Betragsquadrat der Pupillenfunktion vor oder sind durch andere experimentelle Verfahren zu gewinnen, sodaß auch hier eine Lösungsmöglichkeit besteht.

4.3. Rotationssymmetrische Pupillenfunktion

Der wichtigste der hier zu behandelnden Spezialfälle ist der einer rotationssymmetrischen Pupillenfunktion $G(\varrho)$.

Führen wir Zylinderkoordinaten ein, so hat (vgl. Fig. 2) der laufende Punkt in der Auffangebene die Koordinaten

$$(\underline{x}, z) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \\ z \end{Bmatrix} \qquad (4.28\ a)$$

und der in der Pupille

$$\underline{r} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ -R\left(1 - \dfrac{\varrho^2}{2R^2}\right) \end{Bmatrix}, \qquad (4.28\ b)$$

mit $G(\underline{\xi}) = G(\varrho)$ lautet also das Kirchhoffsche Beugungsintegral

$$K(r,z) = \text{const.} \int_{\varrho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} G(\varrho) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\lambda R}\left[r\varrho\cos(\varphi-\psi) - zR\left(1 - \frac{\varrho^2}{2R^2}\right)\right]\right\} \varrho\, d\varphi\, d\varrho =$$

$$= 2\pi \,\text{const.} \int_{\varrho=0}^{\infty} G(\varrho)\, J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda R} r\varrho\right) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda} z \left(1 - \frac{\varrho^2}{2R^2}\right)\right\} \varrho \, d\varrho, \qquad (4.29)$$

worin $J_0(x)$ die Besselfunktion 0. Ordnung ist. Bei $z = 0$ ist also $K(r)$ die Hankeltransformierte von $G(\varrho)$.

Somit lautet die Intensität im Bildraum

$$d(r,z) = K(r,z)\, K^*(r,z) = 4\pi^2 |\text{const.}|^2 \cdot \qquad (4.30)$$

$$\cdot \int_{\varrho=0}^{b} \int_{\varrho'=0}^{b} G(\varrho) G^*(\varrho') \varrho \varrho' \, J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda R} r\varrho\right) J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda R} r\varrho'\right) \exp\left\{-2\pi i z \frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{2\lambda R^2}\right\} d\varrho \, d\varrho';$$

dabei wurde jetzt eine Pupille vom Radius b vorausgesetzt. Der Phasenfaktor $\exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda} z\right\}$ fiel wieder weg.

Eine Zusammenfassung der beiden Besselfunktionen in (4.30) zu einer einzigen in Analogie zu früher ist nicht möglich, wir können jedoch bereits an dieser Stelle den Übergang zur Übertragungsfunktion $D(\omega, z)$ vollziehen. Diese folgt aus $d(r,z)$ wiederum durch eine Hankeltransformation. Es ist

$$D(\omega, z) = 2\pi \int_{0}^{\infty} d(r,z)\, J_0(2\pi\omega r)\, r \, dr \qquad (4.31)$$

$$= 8\pi^3 |\text{const.}|^2 \int_{r=0}^{\infty} \int_{\varrho=0}^{b} \int_{\varrho'=0}^{b} G(\varrho) G^*(\varrho') \varrho \varrho' \exp\left\{-2\pi i z \frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{2\lambda R^2}\right\} \cdot$$

$$\cdot J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda R} r\varrho\right) J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda R} r\varrho'\right) J_0(2\pi\omega r)\, r \, d\varrho' d\varrho \, dr.$$

Die Integration über r kann sofort durchgeführt werden.

Es ist [25, 26]

$$\mathcal{F} = 4\pi^2 \int_0^\infty J_0\left(\frac{\varrho}{\lambda R} 2\pi r\right) J_0\left(\frac{\varrho'}{\lambda R} 2\pi r\right) J_0(\omega 2\pi r)\, r\, dr$$

$$= \int_0^\infty J_0\left(\frac{\varrho}{\lambda R} r'\right) J_0\left(\frac{\varrho'}{\lambda R} r'\right) J_0(\omega r')\, r'\, dr' \qquad (4.32)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta^{-1}$$

mit Δ = Inhalt des Dreieckes mit den Seiten $\frac{\varrho}{\lambda R}, \frac{\varrho'}{\lambda R}, \omega$;

$\mathcal{F} = 0$, falls kein Dreieck existiert.

Betrachten wir uns das Integrationsgebiet des zugehörigen Duffieuxintegrals (Fig. 8, vgl. (2.13); die in (2.13) mit $\underline{w}$ bezeichnete Integrationsvariable entspricht der in Fig. 8 verwendeten Variablen $\underline{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$; nach (2.10) ist $\underline{\nu} = \underline{\xi}/R\lambda$), so ist dieses Dreieck das Dreieck (Mittelpunkt der Pupille, Mittelpunkt der konjugierten Pupille, zu einem bestimmten ϱ, ϱ'-Paar gehöriger laufender Punkt im Überlappungsgebiet).

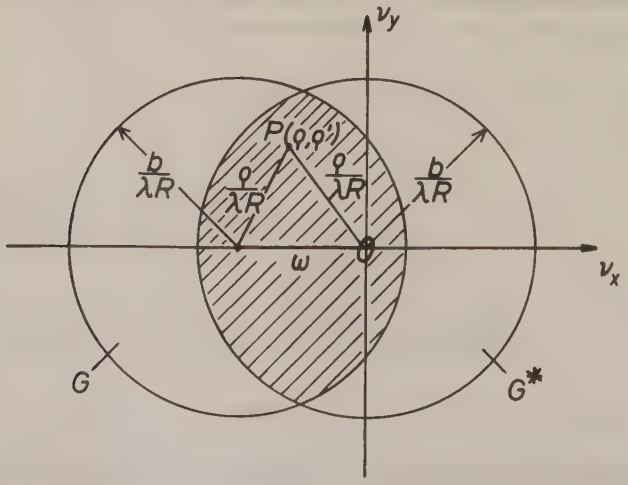


Fig. 8: Zur Deutung von Gleichung (4.32)

Der Dreiecksinhalt ist

$$\Delta = \left\{ p\left(p - \frac{\varrho}{\lambda R}\right)\left(p - \frac{\varrho'}{\lambda R}\right)(p-\omega) \right\}^{1/2} \qquad \text{mit } p = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda R} + \frac{\varrho'}{\lambda R} + \omega\right) \tag{4.33}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\varrho}{\lambda R} + \frac{\varrho'}{\lambda R} + \omega\right)\left(-\frac{\varrho}{\lambda R} + \frac{\varrho'}{\lambda R} + \omega\right)\left(\frac{\varrho}{\lambda R} - \frac{\varrho'}{\lambda R} + \omega\right)\left(\frac{\varrho}{\lambda R} + \frac{\varrho'}{\lambda R} - \omega\right)\right\}^{1/2}.$$

Gleichung (4.31) lautet also nunmehr

$$D(\omega, z) = 4\,|\text{const.}|^2 \int_{\varrho=0}^{b}\int_{\varrho'=0}^{b} \frac{H(\varrho)H^*(\varrho')\exp\left\{-2\pi i z \frac{\varrho^2-\varrho'^2}{2\lambda R^2}\right\} d\varrho' d\varrho}{\left\{\left(\frac{\varrho}{\lambda R} + \frac{\varrho'}{\lambda R}\right)^2 - \omega^2\right\}^{1/2}\left\{\omega^2 - \left(\frac{\varrho}{\lambda R} - \frac{\varrho'}{\lambda R}\right)^2\right\}^{1/2}} \tag{4.34}$$

mit $H(\varrho) = G(\varrho)\cdot\varrho$
und $H^*(\varrho') = G^*(\varrho')\varrho'$.

Wir führen nunmehr wieder neue Koordinaten ein:

$$\frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{2\lambda R^2} = w \qquad \varrho = \frac{\lambda R}{2} u + R\,\frac{w}{u}$$

$$\frac{\varrho + \varrho'}{\lambda R} = u \qquad \varrho' = \frac{\lambda R}{2} u - R\,\frac{w}{u} \quad . \tag{4.35}$$

*)

Die Funktionaldeterminante ist diesmal

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u} & \frac{\partial \varrho}{\partial w} \\ \frac{\partial \varrho'}{\partial u} & \frac{\partial \varrho'}{\partial w} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda R^2}{u} \quad , \tag{4.36}$$

---

*) Natürlich kann hier als 2. Koordinate auch eine andere Kombination von ϱ und ϱ', z.B. $\frac{\varrho - \varrho'}{\lambda R}$, $\frac{\varrho}{\lambda R}$ oder $\frac{\varrho'}{\lambda R}$ eingeführt werden; der Einfluß auf die weitere Rechnung ist unerheblich.

die Transformationsgleichung hat also endgültig folgende Gestalt

$$D(\omega,z) = 4\lambda R^2 \,|\,\text{const.}\,|^2 \cdot \int_{w=-\frac{b^2}{2\lambda R^2}}^{\frac{b^2}{2\lambda R^2}} \int_{u=\sqrt{\frac{2|w|}{\lambda}}}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\left(\frac{b}{\lambda R}\right)^2-\frac{2|w|}{\lambda}}} \frac{H\left(\frac{\lambda R}{2}u + R\frac{w}{u}\right) H^*\left(\frac{\lambda R}{2}u - R\frac{w}{u}\right) \exp\{-2\pi i z w\}\, du\, dw}{|u|\left\{u^2-\omega^2\right\}^{1/2}\left\{\omega^2-\frac{4}{\lambda^2}\frac{w^2}{u^2}\right\}^{1/2}} \tag{4.37}$$

Fig. 9 zeigt nun das Analogon zum Schmetterlingsdiagramm, das Bild der kreisförmigen Pupille im jetzigen (u,w)-Raum. Dabei ergeben sich folgende Zuordnungen:

$$\begin{aligned}
\varrho = 0 &\longleftrightarrow w = -\frac{\lambda}{2}u^2 \\
\varrho' = 0 &\longleftrightarrow w = +\frac{\lambda}{2}u^2 \\
\varrho = \frac{b}{2} &\longleftrightarrow w = -\frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{b}{2R}u \\
\varrho' = \frac{b}{2} &\longleftrightarrow w = \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{b}{2R}u \\
\varrho = b &\longleftrightarrow w = -\frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{b}{R}u \\
\varrho' = b &\longleftrightarrow w = \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{b}{R}u \,.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

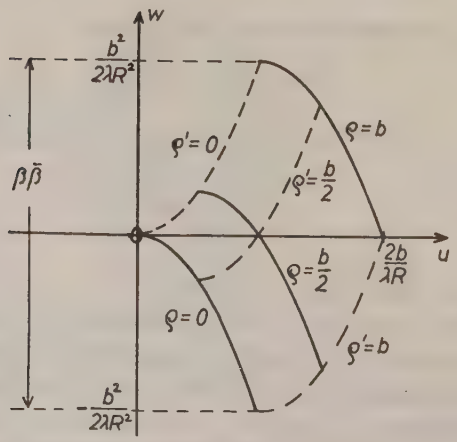


Fig. 9: Bild der kreisförmigen Pupille im (u,w)-Raum

Wieder ist die gesamte Information über $G(\varphi)$ bereits in der Hälfte des Diagramms (entweder der oberen oder unteren Hälfte bzw. ganz allgemein in zur u-Achse symmetrischen Hälften) enthalten; denn es ist

$$H(u,w)\, H^*(u,w) = \left\{ H(u,-w)\, H^*(u,-w) \right\}^*, \qquad (4.39)$$

im Integrationsgebiet des Duffieuxintegrals (Fig. 8) der linken und der rechten Hälfte entsprechend ($w = 0$, d.h. $\varphi = \varphi'$ bezeichnet die senkrechte Halbierende).
Führen wir nun bezüglich (z,w) die Fourierumkehr durch, so gewinnen wir aus (4.37) schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(\omega,z) \exp\{2\pi i w z\}\, dz \cdot \frac{1}{4\lambda R^2 |\text{const.}|^2} \equiv F(\omega,w)$$

$$= \int_{u=\sqrt{\frac{2|w|}{\lambda}}}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}} \frac{1}{\left\{(u^2-\omega^2)(\omega^2u^2-\frac{4}{\lambda^2}w^2)\right\}^{1/2}}\; HH^*(u,w)\, du, \qquad (4.40)$$

also mit w als Parameter eine Integralgleichung der Form

$$F(\omega) = \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{K}(\omega,u)\, f(u)\, du$$

mit
$$\mathcal{K}(\omega,u) = \frac{1}{\left\{(u^2-\omega^2)(\omega^2u^2-\frac{4}{\lambda^2}w^2)\right\}^{1/2}} \qquad (4.41)$$

und
$$f(u) = HH^*(u,w) \,.$$

Betrachten wir nun Kern und Grundgebiet dieser Integralgleichung (Fig. 10). Letzteres wird einmal natürlich begrenzt durch die beiden Geraden $u = \sqrt{\frac{2|w|}{\lambda}}$ (entsprechend $\varphi = 0$ bzw. $\varphi' = 0$) und $u = \frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}$ (entspr. $\varphi = b$ bzw. $\varphi' = b$). Kritische Stellen sind ferner die Kurven, für die der Nenner des Kerns verschwindet.

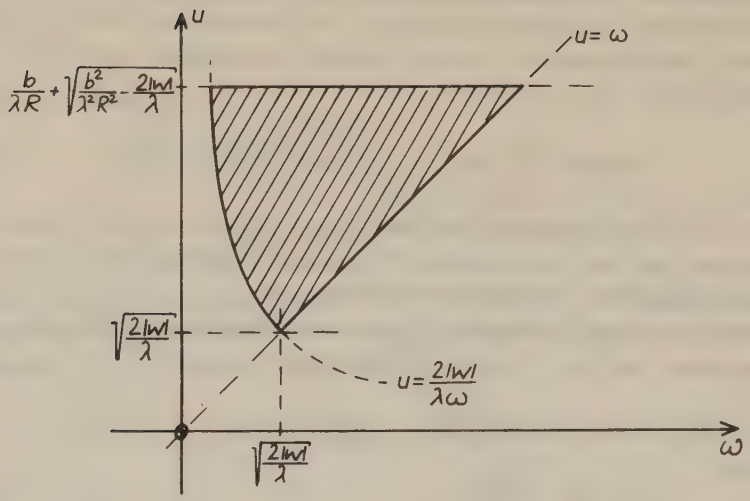


Fig. 10: Grundgebiet der Integralgleichung (4.40)

Nicht mehr definiert bzw. gleich Null ist der Dreiecksinhalt für

(1) $$\omega \geq u ,$$

d.h. $$\omega \geq \frac{\varrho+\varrho'}{\lambda R} \qquad (4.42\ a)$$

und

(2) $$u \leq \frac{2|w|}{\lambda\omega} ,$$

d.h. $$\frac{\varrho+\varrho'}{\lambda R} \leq \frac{|\varrho^2-\varrho'^2|}{\omega\lambda^2R^2}$$

bzw. $$\omega \leq \frac{|\varrho-\varrho'|}{\lambda R} , \qquad (4.42\ b)$$

wie sich auch anhand des Fig. 8 zugrundegelegten Bildes leicht erklären läßt. Somit umfaßt das Grundgebiet der Integralgleichung

nur das in Fig. 10 schraffierte Gebiet. Fig. 11 a - d illustriert die 4 aufgezeigten Begrenzungen. Es ist offensichtlich, daß Fall a) Grenzfall der Fälle c) und d) für $\varrho = 0$ ist.

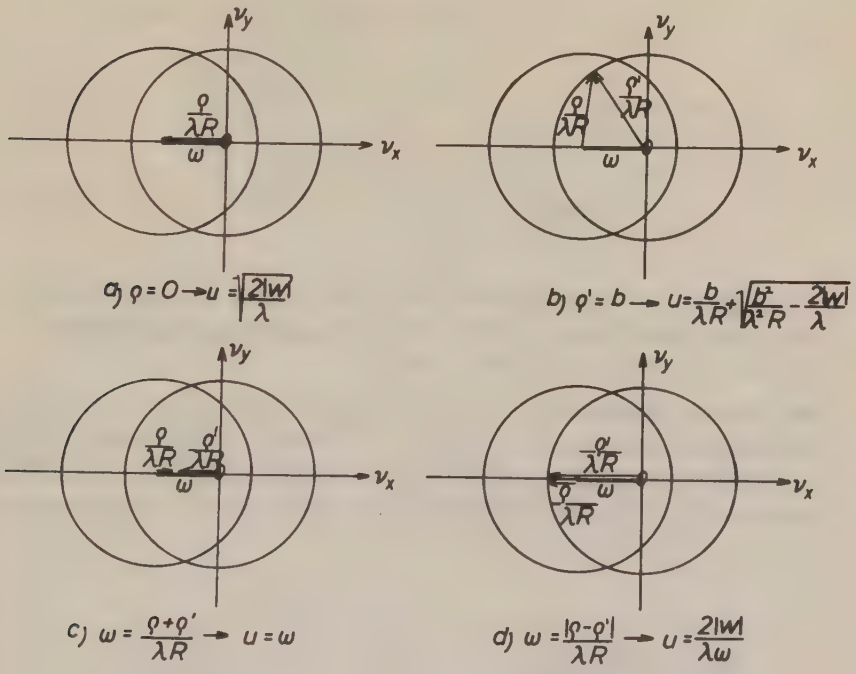


Fig. 11: Grenzen des Grundgebiets der Integralgleichung (4.40)
(Pfeile symbolisieren keine Vektoren)

Unsere Integralgleichung hat also endgültig folgende Gestalt:

$$F(\omega) = \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{K}(\omega, u)\, f(u)\, du \qquad (4.43)$$

mit $$F(\omega) = \frac{1}{4\lambda R^2 |\text{const.}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega, z) \exp\{2\pi i w z\}\, dz,$$

$$\mathcal{K}(\omega, u) = \frac{1}{\{(u^2-\omega^2)(\omega^2 u^2 - \frac{4}{\lambda^2} w^2)\}^{1/2}},$$

$$f(u) = H\left(\frac{\lambda R}{2}u + R\frac{w}{u}\right) H^*\left(\frac{\lambda R}{2}u - R\frac{w}{u}\right) ,$$

$$u_1 = \begin{cases} \dfrac{2|w|}{\lambda\omega} & \text{für } \omega \le \sqrt{\dfrac{2|w|}{\lambda}} \\ \omega & \text{für } \omega \ge \sqrt{\dfrac{2|w|}{\lambda}} \end{cases} ,$$

$$u_2 = \frac{b}{\lambda R} + \sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2} - \frac{2|w|}{\lambda}} .$$

Da wegen (4.39) eine Beschränkung auf $w > 0$ bereits die vollständige Information liefert, können wiederum die Betragsstriche von $|w|$ weggelassen werden.

Der Definitionsbereich von Gleichung (4.43) zerfällt in 2 Definitionsbereiche. Figur 12 zeigt die durch $\omega \lessgtr \sqrt{\frac{2|w|}{\lambda}} \rightsquigarrow \omega^2 \lessgtr \left|\frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{\lambda^2 R^2}\right|$ gegebene Zuordnung dieser beiden Bereiche. Bereich 1 erstreckt sich dabei nie in das Gebiet $\omega > \frac{b}{\lambda R}$, hier existiert nur Bereich 2.

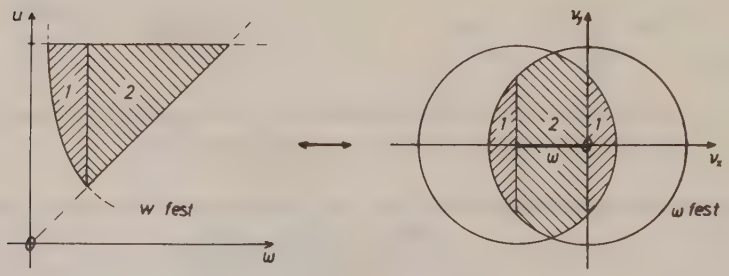


Fig. 12: Zuordnung der Integrationsbereiche

Durch eine einfache Koordinatentransformation ist es möglich, Bereich 1 in Bereich 2 zu transformieren (und umgekehrt).

In Bereich 1 ist z.B.

$$F(\omega) = \int_{\frac{2|W|}{\lambda\omega}}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \frac{1}{\left\{(u^2-\omega^2)(\omega^2u^2-\frac{4}{\lambda^2}W^2)\right\}^{1/2}} f(u)\,du$$

$$\text{mit} \quad \omega \leq \sqrt{\frac{2|W|}{\lambda}} \; .$$

Führen wir nun ein

$$\omega' = \frac{2|W|}{\lambda\omega} \; ,$$

so wird Gleichung (4.44)

$$\bar{F}(\omega') \equiv F\left(\frac{2|W|}{\lambda\omega'}\right) = \int_{\omega'}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \frac{f(u)\,du}{\left\{(u^2-\frac{4W^2}{\lambda^2\omega'^2})(\frac{4W^2}{\lambda^2\omega'^2}u^2-\frac{4W^2}{\lambda^2})\right\}^{1/2}}$$

$$= \frac{\omega'^2\lambda}{2|W|} \int_{\omega'}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \frac{f(u)\,du}{\left\{(\omega'^2u^2-\frac{4W^2}{\lambda^2})(u^2-\omega'^2)\right\}^{1/2}} = \frac{\omega'^2\lambda}{2|W|} F($$

$$\text{mit} \quad \omega' \geq \sqrt{\frac{2|W|}{\lambda}} \; .$$

Z.B. ist im Fall der idealen Pupille ($G(\varrho) = G^*(\varrho'$,

$$HH^*(\varrho,\varrho') = \varrho\varrho',$$

also $$f(u) = \varrho(u)\,\varrho'(u) = \frac{\lambda^2R^2}{4}u^2 - R^2\frac{W^2}{u^2}$$

und somit (siehe Anhang IV)

$$F(\omega) = \frac{\lambda^2 R^2}{4 u_2 \omega} \left\{ (u_2^2 - \omega^2)\left(u_2^2 - \frac{4W^2}{\lambda^2 \omega^2}\right) \right\}^{1/2}$$

mit

$$u_2 = \frac{b}{\lambda R} + \sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2} - \frac{2|W|}{\lambda}} \,. \qquad (4.48)$$

Die Transformation z.B. von Bereich 1 in Bereich 2 durch Einsetzen von $\omega = \frac{2|W|}{\lambda \omega'}$ führt - wie leicht ersichtlich - sofort zu

$$F\left(\frac{2|W|}{\lambda \omega'}\right) = \frac{\omega'^2 \lambda}{2|W|} \cdot \frac{\lambda^2 R^2}{4 u_2 \omega'} \left\{ \left(u_2^2 - \frac{4W^2}{\lambda^2 \omega'^2}\right)\left(u_2^2 - \omega'^2\right) \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{\omega'^2 \lambda}{2|W|} \cdot F(\omega') \,. \qquad (4.49)$$

Wie wir sehen, ist es ausreichend, unsere Messungen auf den Ortsfrequenzbereich eines der beiden praktisch zu ein und derselben Integralgleichung führenden Bereiche 1 und 2 zu beschränken. Bereits anhand von Fig. 12 wurde angedeutet, daß zwar Bereich 2 von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{2b}{\lambda R}$ geht, Bereich 1 sich jedoch lediglich von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{b}{\lambda R}$ erstreckt; denn es ist

$$\omega_{max,1} = \sqrt{\frac{2 W_{max}}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 b^2}{2 \lambda^2 R^2}} = \frac{b}{\lambda R} \,. \qquad (4.50)$$

Somit genügt es, die Messungen auf das halbe Ortsfrequenz-Spektrum zu erstrecken. Natürlich steigen hierdurch die Anforderungen an die Meßgenauigkeit bei $D(\omega,z)$; sind diese nicht zu erfüllen, ist Bereich 2, d.h. die Messung über das ganze Ortsfrequenzspektrum vorzuziehen.

Der einfachen unteren Berandung wegen wollen wir unsere Berechnung im Bereich 2 durchführen. Es ist also nunmehr eine Volterrasche Integralgleichung 1. Art der Form

$$F(\omega) = \int_{\omega}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \frac{f(u)\,du}{\left\{(u^2-\omega^2)(\omega^2u^2-\frac{4}{\lambda^2}W^2)\right\}^{1/2}} \qquad (4.51)$$

zu lösen, deren Kern allerdings am unteren Rand ($u = \omega$) mit der Potenz 1/2 unendlich wird.
Diese Singularität ist jedoch in üblicher Weise durch Glättung zu beheben. [7, 27] Dazu multiplizieren wir (dies wird sich später als die günstigste Möglichkeit erweisen (siehe S.57)) beide Seiten von (4.51) mit $\omega/(\omega^2-\eta^2)^{1/2}$ und integrieren jeweils von η bis $\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}$ über ω:

$$\int_{\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \frac{\omega\,F(\omega)\,d\omega}{\left\{\omega^2-\eta^2\right\}^{1/2}} \equiv E(\eta) \qquad (4.52)$$

$$= \int_{\omega=\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \int_{u=\omega}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \frac{\omega\,f(u)\,du\,d\omega}{\left\{(\omega^2-\eta^2)(u^2-\omega^2)(\omega^2u^2-\frac{4}{\lambda^2}W^2)\right\}^{1/2}}.$$

Nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge kann auf der rechten Seite die Integration über ω durchgeführt werden; es ist (vgl. Fig. 13)

$$E(\eta) = \int_{u=\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2}-\frac{2|W|}{\lambda}}} \int_{\omega=\eta}^{u} \frac{2\omega\,d\omega\,f(u)\,du}{\left\{-4u^2(\omega^2-u^2)(\omega^2-\eta^2)(\omega^2-\frac{4W^2}{\lambda^2u^2})\right\}^{1/2}} =$$

$$\varepsilon = \omega^2 = \int_{u=\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}} \frac{f(u)}{u} \int_{\varepsilon=\eta^2}^{u^2} \frac{d\varepsilon}{\left\{-4\,(\varepsilon-u^2)(\varepsilon-\eta^2)\left(\varepsilon-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}\right)\right\}^{1/2}}\,du$$

$$= \int_{\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}} \frac{K\left\{\sqrt{\frac{u^2-\eta^2}{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}}\right\}}{u\sqrt{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}}\, f(u)\,du \qquad (4.53)$$

mit $$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

dem vollständigen Legendreschen (Elliptischen) Normalintegral 1. Gattung [24, 25].

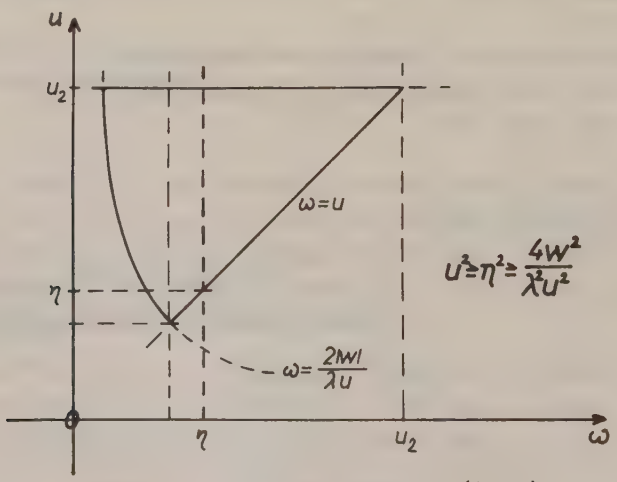


Fig. 13: Zur Glättung von (4.51)

Das Integral $E(\eta) = \int_{\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}} \frac{\omega F(\omega)\, d\omega}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}$ konvergiert dabei nach den Kriterien 1 und 2, S. 348 in [7]; denn es existiert auf alle Fälle ein $\alpha < 1$ derart, daß für hinreichend nahe bei η gelegenes ω die Funktion

$$\frac{\omega |F(\omega)|\,(\omega-\eta)^{\alpha}}{\{(\omega-\eta)(\omega+\eta)\}^{1/2}} < \infty$$

ist.

Wie z.B. bei der Abelschen Integralgleichung führt eine derartige Glättung oft auf eine unmittelbar zu differenzierende Gleichung. Da dies hier nicht der Fall ist, ist nunmehr Gleichung (4.53) durch Differentiation nach η in eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art umzuwandeln. Hierdurch wird auch die spezielle Wahl der Glättungsprozedur in (4.52) erklärt. Sämtliche untersuchten Möglichkeiten führten auf eine Integralgleichung der Form $E(\eta) = \int_{\eta}^{u_2} h(\eta,u)\, K\{k(\eta,u)\}\, f(u)\, du$, jedoch lediglich bei der hier gewählten Glättung war h nur von u abhängig, was die nachfolgende Differentiation nach η wesentlich erleichtert.

Mit der Abkürzung

$$e(u) = \frac{f(u)}{u\sqrt{u^2 - \frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}} \qquad (4.54)$$

lautet die geglättete Integralgleichung schließlich

$$E(\eta) = \int_{\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}} K\left(\sqrt{\frac{u^2-\eta^2}{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}}\right) e(u)\, du \,. \qquad (4.55)$$

Differentiation nach η ergibt

$$\frac{d}{d\eta} E(\eta) = \int_{\eta}^{u_2} \frac{\partial}{\partial \eta} K\left(\sqrt{\frac{u^2-\eta^2}{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}}\right) e(u)\,du - K(0)\,e(\eta). \tag{4.56}$$

Unter Benutzung von [28]

$$K(0) = \frac{\pi}{2}$$

und $$2\frac{dK}{dx} = \frac{B}{1-x} \qquad \text{mit} \qquad x \equiv k^2 \tag{4.57}$$

$$\text{und} \qquad B = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-k^2\xi^2}}\, d\xi$$

nimmt schließlich Gleichung (4.56) folgende Form an

$$-\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta} E(\eta) = e(\eta) + \int_{\eta}^{\frac{b}{\lambda R}+\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 R^2}-\frac{2|w|}{\lambda}}} \frac{2\eta\, B(k)}{\pi\left(\eta^2 - \frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}\right)}\, e(u)\,du$$

$$\text{mit } k^2 = \frac{u^2-\eta^2}{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}\,, \tag{4.58}$$

also - wie bereits angedeutet - eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art mit der Unbekannten

$$e(u) = \frac{f(u)}{u\sqrt{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}} = \frac{GG^*(u,w)\,\varphi\varphi'(u,w)}{u\sqrt{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}}$$

$$= \frac{GG^*(u,w)\left(\frac{\lambda^2 R^2}{4}u^2 - R^2\frac{w^2}{u^2}\right)}{u\sqrt{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}} = \frac{\lambda^2 R^2}{4u}\sqrt{u^2-\frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}\; GG^*(u,w). \tag{4.59}$$

Die aus Meßdaten zu bestimmende, d.h. als bekannt vorauszusetzende Funktion - $\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta}E(\eta)$ können wir auch schreiben als

$$-\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta}E(\eta) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta}\int_{\eta}^{\omega_2}\frac{\omega F(\omega)\,d\omega}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{\eta}^{\omega_2}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\omega F(\omega)\,d\omega}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}} + \frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to\eta}\frac{\omega F(\omega)}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}$$

$$= -\frac{2\eta}{\pi}\int_{\eta}^{\omega_2}\frac{\omega F(\omega)\,d\omega}{\{\omega^2-\eta^2\}^{3/2}} + \frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to\eta}\frac{\omega F(\omega)}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}$$

bzw. nach partieller Integration ($v' = \frac{\omega}{\{\omega^2-\eta^2\}^{3/2}}$, $u = F(\omega)$)

$$-\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta}E(\eta) = \frac{2\eta}{\pi}\frac{F(\omega_2)}{\{\omega_2^2-\eta^2\}^{1/2}} - \frac{2\eta}{\pi}\lim_{\omega\to\eta}\frac{F(\omega)}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}$$

$$-\frac{2\eta}{\pi}\int_{\eta}^{\omega_2}\frac{\frac{dF(\omega)}{d\omega}}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}\,d\omega + \frac{2}{\pi}\lim_{\omega\to\eta}\frac{\omega F(\omega)}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}$$

$$= \frac{2\eta}{\pi}\left\{\frac{F(\omega_2)}{\{\omega_2^2-\eta^2\}^{1/2}} - \int_{\eta}^{\omega_2}\frac{\frac{dF(\omega)}{d\omega}}{\{\omega^2-\eta^2\}^{1/2}}\,d\omega\right\}$$

mit $$\omega_2 = \frac{b}{\lambda R} + \sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2R^2} - \frac{2|W|}{\lambda}}\,. \qquad (4.60)$$

Für die spätere numerische Auswertung der Meßergebnisse ist diese Form u.U. wesentlich günstiger, wobei in

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{4\lambda R^2 |const.|^2} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega,z) \exp\{2\pi i w z\}\, dz \qquad (4.61)$$

bei Bedarf noch die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauscht werden kann (vgl. hierzu Kapitel 5).

Das im Kern von (4.58) auftauchende vollständige elliptische Integral $\mathbf{B}(k)$ ist für $0 \leq k^2 \leq 1$ definiert und nimmt monoton von $B = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7845$ für $k^2 = 0$ bis $B = 1$ für $k^2 = 1$ zu. Die durch 101 Tabellenwerte k_i^2 in /28/ gelegte Ausgleichs"gerade" $\bar{B}_1 = 0{,}7668 + 0{,}1839\, k^2$ nähert B bereits mit einem mittleren Fehler von nur 1,5 % an, die entspr. Ausgleichsparabeln $\bar{B}_2 = 0{,}7978 + 0{,}1821\, k^4$ bzw. $\bar{B}_3 = 0{,}7924 + 0{,}0288\, k^2 + 0{,}1551\, k^4$ weichen lediglich noch um einen mittleren Fehler von 0,6 % ab. Berücksichtigen wir zusätzlich die Tatsache, daß B(k) in (4.58) im wesentlichen (vgl.(4.57)) im Zusammenhang $\frac{B(k)}{1-k^2}$ auftritt, dadurch, daß wir die einzelnen Fehlerquadrate mit dem Gewicht $\frac{1}{1-k_i^2}$ versehen (auf den Punkt $k_i = 1$ muß natürlich hier verzichtet werden), so lauten die so gewichteten Ausgleichskurven nunmehr $\bar{\bar{B}}_1 = 0{,}7419 + 0{,}2332\, k^2$ und $\bar{\bar{B}}_2 = 0{,}7941 + 0{,}1911\, k^4$ bzw. $\bar{\bar{B}}_3 = 0{,}8033 - 0{,}0366\, k^2 + 0{,}2197\, k^4$.

Gleichung (4.58), der Einfachheit halber abgekürzt in der Form

$$E'(\eta) = e(\eta) + \int_{\eta}^{u_2} \mathcal{K}'(\eta,u)\, e(u)\, du, \qquad (4.62)$$

ist schließlich (eindeutig) mit Hilfe der Neumannschen Reihe zu lösen /7/. Hierzu geht man aus von der Integralgleichung

$$e(\eta) = E'(\eta) - \lambda \int_{\eta}^{u_2} \mathcal{K}'(\eta,u)\, e(u)\, du \qquad (4.63)$$

und setzt $\mathcal{K}'(\eta,u) \equiv 0$ für $u < \eta$.

Setzen wir nun $e_0(\eta) = 0$ als nullte Näherung für $e(\eta)$ an und setzen wir dies in (4.63) ein, so erhält man als 1. Näherung

$$e_1(\eta) = E'(\eta),$$

bei Wiederholung dieses Verfahrens als 2. Näherung

$$e_2(\eta) = E'(\eta) - \lambda \int_{\eta}^{u_2} K'(\eta,u)\, E'(u)du$$

und schließlich als n. Näherung

$$e_n(\eta) = E'(\eta) - \lambda \int_{\eta}^{u_2} K'^{(1)}(\eta,u)\, E'(u)du + \lambda^2 \int_{\eta}^{u_2} K'^{(2)}(\eta,u)\, E'(u)du + \ldots\ldots (-\lambda)^n \int_{\eta}^{u_2} K'^{(n)}(\eta,u)\, E'(u)du \qquad (4.64)$$

mit

$$K'^{(n)}(\eta,u) = \int_{\eta}^{u} K'(\eta,t)\, K'^{(n-1)}(t,u)dt, \qquad (4.65)$$

dem $(n-1)$. iterierten Kern; denn nach Voraussetzung ist $K'(\eta,t) \equiv 0$ für $t < \eta$ und $K'(t,u) \equiv 0$ für $u < t$.

Für $n \to \infty$ erhält man endlich die Neumannsche Reihe

$$e(\eta) = -\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^{n-1} \int_{\eta}^{u_2} K'^{(n)}(\eta,u) E'(u)du + E'(\eta)$$

$$= -\lambda \int_{\eta}^{u_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^{n-1} K'^{(n)}(\eta,u) E'(u)du + E'(\eta). \qquad (4.66)$$

Eine besondere Untersuchung der Konvergenz dieser Reihe ist nicht nötig, da bei Volterraschen Integralgleichungen der

Form (4.63) die zugehörige Neumannsche Reihe für alle endlichen λ-Werte konvergiert, also auch für $\lambda = 1$ /7, S.542/.

$$\Gamma(\eta,u,1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} K'^{(n)}(\eta,u) \qquad (4.67)$$

ist also der lösende Kern unseres Integralgleichungsproblems.

Anstelle einer expliziten Darstellung von (4.67) ist jedoch i.a. eine Näherung durch Iteration nach dem Muster von Gleichung (4.64) vorzuziehen.

5. Umfang der Messungen im Brennraum

Wir haben zwar in Kapitel 4 eine Reihe zweidimensionaler Beispiele de facto auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt, wir können also auf Messungen mit Astigmatismus verzichten; es bleibt aber vorerst immer noch die Aufgabe, $D(\underline{u},z)$ bzw. $d(\underline{x},z)$ für alle Defokussierungen von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ zu messen. Jedoch kann auch hier die Anzahl der durchzuführenden Messungen wesentlich eingeschränkt werden.

5.1. Interpolationsformeln im eindimensionalen Fall

Betrachten wir wieder zuerst den eindimensionalen Fall. Die Punktbildintensität im Brennraum $d(x,z)$ wird bekanntlich (vgl. (3.13)) als Fouriertransformierte einer Funktion $F(u,w)$ dargestellt, die in dem in Fig. 4 dargestellten Gebiet von Null verschieden ist. Es liegt nun auf der Hand, dieses Gebiet in ein Rechteck mit den Längen $4\frac{b}{\lambda R} = 4\bar{\beta}$ und $\frac{b^2}{\lambda R^2} = \beta\bar{\beta}$ einzuschließen und dann das Samplingtheorem (2.14) anzuwenden. Mit $W_u = 4\bar{\beta}$ und $W_w = \beta\bar{\beta}$ ist

$$d(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} d\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \frac{\sin\pi(4\bar{\beta}x-n)}{\pi(4\bar{\beta}x-n)} \frac{\sin\pi(\beta\bar{\beta}z-m)}{\pi(\beta\bar{\beta}z-m)} \,. \tag{5.1}$$

Wir setzen dies nun in Gleichung (3.20) ein. Dann wird

$$G(\xi)\,G^*(\xi') = \frac{|\xi-\xi'|}{|\text{const.}|^2 R^3\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d(x,z)\exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}x + \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z\right]\right\} dx\,dz =$$

$$= \frac{|\xi - \xi'|}{|const.|^2 R^3 \lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}{}' d\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \frac{\sin\pi(4\bar{\beta}x-n)}{\pi(4\bar{\beta}x-n)} \frac{\sin\pi(\beta\bar{\beta}z-m)}{\pi(\beta\bar{\beta}z-m)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}x + \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}z\right]\right\} dx\,dz$$

und nach Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation und Durchführung der Integration über x und z

$$G(\xi)\, G^*(\xi') = \frac{|\xi-\xi'|}{|const.|^2 R^3 \lambda^2 4\bar{\beta}^2\beta} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}{}' d\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i\left[\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}\frac{n}{4\bar{\beta}} + \frac{\xi^2-\xi'^2}{2\lambda R^2}\frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right]\right\}$$

$$\text{für } 2\pi\frac{|\xi-\xi'|}{\lambda R} < \pi 4\bar{\beta} \text{ und } 2\pi\frac{|\xi^2-\xi'^2|}{2\lambda R^2} < \pi\beta\bar{\beta} \qquad (5.2)$$

$$= \frac{|\xi-\xi'|}{|const.|^2 4b^3} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}{}' d\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{2\pi i\left[n\frac{\xi-\xi'}{4b} + m\frac{\xi^2-\xi'^2}{2b^2}\right]\right\}$$

$$\text{für } |\xi|, |\xi'| < b.$$

für $|\xi|, |\xi'| > b$ ist naturgemäß $G(\xi)\, G^*(\xi') = 0$. Die Punktbildintensität $d(x,z)$ ist also nurmehr an den in x-Richtung um $\frac{1}{4\bar{\beta}}$ und in z-Richtung um $\frac{1}{\beta\bar{\beta}}$ auseinanderliegenden Samplingpunkten zu messen.

Gehen wir, wie das üblicherweise der Fall ist, nicht von der Punktbildintensität, sondern von der OÜF $D(u,z)$ aus, so kann das Samplingtheorem nur bezüglich der Fouriertransformation $\frac{\xi^2 - \xi'^2}{2\lambda R^2} \leftrightarrow z$ angewandt werden.

Es wird in Analogie zu (5.2)

$$G(\xi)\, G^*(\xi') = \frac{|\xi-\xi'|}{|\text{const.}|^2\, b^2 \lambda R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D\left(\frac{\xi-\xi'}{\lambda R}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \exp\left\{2\pi i m \frac{\xi^2-\xi'^2}{2b^2}\right\}$$

für $$|\xi|, |\xi'| < b \,. \qquad (5.3)$$

In den einzelnen durch $z_m = \frac{m}{\beta\bar{\beta}}$ gegebenen Meßebenen kann dann D z.B. aufgrund von Messungen für 2N + 1 äquidistante Werte von $u = \frac{\xi-\xi'}{\lambda R}$ durch folgende Interpolationsformel angenähert werden [9]:

$$D(u, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}) \approx \sum_{j=-N}^{N} D\left(\frac{j\ell}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) g_j\left\{\pi \frac{u}{\ell}(2N+1)\right\}$$

mit $$g_j\left\{\pi \frac{u}{\ell}(2N+1)\right\} = \frac{\sin\pi\left\{\frac{u}{\ell}(2N+1)-j\right\}}{(2N+1)\sin\pi\left\{\frac{u}{\ell}-\frac{j}{2N+1}\right\}} \,. \qquad (5.4)$$

Zur Herleitung dieser Interpolationsformel wird D in einem praktischerweise zum Nullpunkt (u = 0) symmetrischen Intervall der Länge 1 durch eine endliche Fourierreihe approximiert, deren (2N + 1) Koeffizienten aus (2N + 1) äquidistanten Werten $D(\frac{j\ell}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})$ nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden.

Wir müssen hier also auch auf Werte für u < 0 zurückgreifen, glücklicherweise ist jedoch(vgl.(2.25))

$$D(-u, z) = |\text{const.}|^2 \exp\left\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\right\} \cdot$$

$$\cdot \int G\{\lambda R(-u+w)\}\, G^*(\lambda R w) \exp\{2\pi i z \lambda u w\}\, dw =$$

$$\overset{w'=w-u}{=} |\text{const.}'|^2 \exp\{2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\}$$

$$\cdot \int G(\lambda R w') G^*\{\lambda R(w'+u)\} \exp\{2\pi i z \lambda u w'\} dw'$$

$$= D^*(u,z), \qquad (5.5)$$

die Werte der OÜF an den N Stützpunkten links des Nullpunktes sind also sofort aus den entsprechenden Werten rechts davon zu gewinnen; im Nullpunkt selbst ist $D(0, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}) = 1$. Die Länge des Intervalls schließlich ist

$$l = \frac{4b}{\lambda R} = 4\bar{\beta}.$$

Somit ist nunmehr

$$G(\xi)\, G^*(\xi') = \frac{|\xi - \xi'|}{|\text{const.}|^2 b^2 \lambda R} \sum_{j=-N}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D\left(\frac{j 4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right)$$
$$\cdot g_j\{\pi \frac{\xi - \xi'}{4b}(2N+1)\} \exp\{2\pi i m \frac{\xi^2 - \xi'^2}{2b^2}\}. \qquad (5.6)$$

Speziell ist

$$g_j\{\pi k\} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ für } j = k \\ 0 \text{ für } j \neq k \end{cases}, \qquad (5.7)$$

wobei j und k ganze Zahlen sind;

bei Beschränkung auf die Werte

$$\xi - \xi' = \frac{j\ 4b}{2N+1}$$

ist daher

$$G(\xi)\, G^*\left(\xi - \frac{4bj}{2N+1}\right) = \frac{4|j|}{|\text{const.}|^2 b\lambda R(2N+1)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} D\left(\frac{j4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \exp\left\{2\pi i m \left[\frac{4j\xi}{b(2N+1)} - \frac{8j^2}{(2N+1)^2}\right]\right\}, \tag{5.8}$$

wie natürlich auch direkt aus (5.3) folgt.

5.2. Zweidimensionale Spezialfälle

Mit leichten Modifikationen gelten die eben angeführten Formeln auch für die in 4.1. und 4.2. aufgeführten Spezialfälle, im Fall rotationssymmetrischer Pupillenfunktionen liegen die Dinge jedoch etwas anders. Zwar kann bezüglich der Fouriertransformation $w \leftrightarrow z$ wieder das Samplingtheorem angewandt werden und führt in Analogie zu (5.3) auf (siehe Gleichung (4.43))

$$F(\omega) = \frac{1}{4b^2 |\text{const.}|^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D\left(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \exp\left\{2\pi i \frac{mw}{\beta\bar{\beta}}\right\}$$

$$\text{für } \varrho, \varrho' < b, \tag{5.9}$$

Ausgangspunkt der (5.4) entsprechenden Interpolation in ω-Richtung hätte im rotationssymmetrischen Fall jedoch die Fourier-Bessel-Reihe $\left(0 \le \omega \le \frac{2b}{\lambda R}\right)$

$$D\left(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(2\pi\alpha_n\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} b_n J_0(2\pi\alpha_n\omega)$$

$$\text{mit } b_n = \frac{\lambda^2 R^2}{2b^2 J_1^2(2\pi\alpha_n 2\bar{\beta})} \, 2\pi \int_0^{2\bar{\beta}} \omega\, D\left(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) J_0(2\pi\alpha_n\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\bar{\beta}^2 J_1^2(4\pi\alpha_n\bar{\beta})} \, d\left(\alpha_n, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \tag{5.10}$$

zu sein. $J_1(x)$ ist dabei die Besselfunktion 1. Ordnung, die α_n sind gegeben durch

$$J_0(4\pi\alpha_n\bar{\beta}) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots , \quad (5.11)$$

im Gegensatz zur reinen Fourierentwicklung sind also die α_n nicht von gleichem Abstand.
Lägen also Messungen der Punktbild<u>intensität</u> d im Brennraum vor, so wäre

$$F(\omega) = \frac{1}{16\pi b^2\bar{\beta}^2|\text{const.}|^2} \cdot \quad (5.12)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{d(\alpha_n, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})}{J_1^2(4\pi\alpha_n\bar{\beta})} J_0(2\pi\alpha_n\omega) \exp\{2\pi i m w\}$$

und somit (vgl. (4.61))

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{8b^2\bar{\beta}^2|\text{const.}|^2} \cdot \quad (5.13)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n d(\alpha_n, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})}{J_1^2(4\pi\alpha_n\bar{\beta})} J_1(2\pi\alpha_n\omega) \exp\{2\pi i m w\} .$$

Das Auftreten nichtgleichabständiger Stützpunkte und im weiteren Verfahren Schwierigkeiten bezüglich der Orthogonalitätsrelationen endlicher Summen lassen es hier geraten scheinen, auf eine dem Rungeverfahren analoge numerische Bestimmung der Koeffizienten einer endlichen Reihe (5.10) aus Messungen von D zu verzichten. Statt dessen kann $D(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})$ natürlich wieder im Bereich $-\frac{2b}{\lambda R} \leq \omega \leq \frac{2b}{\lambda R}$ in eine Fourierreihe entwickelt werden (aus Symmetriegründen ist - vgl. (2.18) - diesmal $D(-\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}) = D(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})$)[21]:

$$D(\omega, \tfrac{m}{\beta\bar{\beta}}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left\{2\pi \frac{n\omega}{4\bar{\beta}}\right\}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{\bar{\beta}} \int_0^{2\bar{\beta}} D(\omega, \tfrac{m}{\beta\bar{\beta}}) \cos\left\{2\pi \frac{n\omega}{4\bar{\beta}}\right\} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\bar{\beta}} \tilde{d}\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right), \qquad (5.14)$$

$D(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})$ und somit $F(\omega)$ ist also auch aus äquidistanten Samplingpunkten zu bestimmen, wenn sich die Intensitätsmessungen auf die "line spread function" erstrecken:

$$F(\omega) = \frac{1}{8b^2\bar{\beta}\,|\text{const.}|^2} \cdot \qquad (5.15)$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{d}(0, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{d}\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \cos\left(2\pi \frac{n\omega}{4\bar{\beta}}\right) \right\} \exp\{2\pi i m w\}$$

bzw.

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -\frac{\pi}{16 b^2 \bar{\beta}^2 |\text{const.}|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} n \tilde{d}\left(\frac{n}{4\bar{\beta}}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \sin\left(2\pi \frac{n\omega}{4\bar{\beta}}\right) \exp\{2\pi i m w\}. \qquad (5.16)$$

Sind dagegen OÜF-Messungen der Ausgangspunkt unserer Rückrechnungen, so können wir wieder auf die Interpolationsformel (5.4) zurückgreifen. Mit $1 = 4\bar{\beta}$ und unter Berücksichtigung der Symmetrie von $D(\omega, \frac{m}{\beta\bar{\beta}})$ ist

$$D(\omega, \tfrac{m}{\beta\bar{\beta}}) = \sum_{j=-N}^{N} D\left(j \frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) g_j\left\{\pi \frac{\omega}{4\bar{\beta}} (2N+1)\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} D\left(j \frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) g_j\left\{\pi \frac{\omega}{4\bar{\beta}} (2N+1)\right\} \qquad (5.17)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} D\left(j \frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) g_{-j}\left\{\pi \frac{\omega}{4\bar{\beta}} (2N+1)\right\}.$$

Eine ähnliche - wenn auch aufgrund etwas anderer Wahl der Stützpunkte nicht ganz so einfache - Interpolationsformel wird auch ausgehend von (5.14) gewonnen. Es ist also (der Einfachheit halber ist die Summation über j wieder in einer Summe zusammengefaßt)

$$F(\omega) = \frac{1}{4b^2|\text{const.}|^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-N}^{N} D\left(j\frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) g_j\left\{\pi\frac{\omega}{4\bar{\beta}}(2N+1)\right\} \exp\{2\pi i m w\} \tag{5.18}$$

und

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{4b^2|\text{const.}|^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-N}^{N} D\left(j\frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right) \frac{dg_j\{\dots\}}{d\omega} \exp\{2\pi i m w\}$$

$$= \frac{\pi}{16\, b^2\bar{\beta}\,|\text{const.}|^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-N}^{N} D\left(j\frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right)$$

$$\frac{\sin x \cos(2N+1)x - \frac{1}{2N+1}\sin(2N+1)x \cos x}{\sin^2 x} \exp\{2\pi i m w\} \tag{5.19}$$

$$\text{mit} \quad x = \pi\left(\frac{\omega}{4\bar{\beta}} - \frac{j}{2N+1}\right).$$

Bei Beschränkung auf die Punkte $\omega = \frac{k\,4\bar{\beta}}{2N+1}$ wird

$$\left.\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\frac{k4\bar{\beta}}{2N+1}} = \frac{\pi}{16\, b^2\bar{\beta}\,|\text{const.}|^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-N \\ j\neq k}}^{N} D\left(j\frac{4\bar{\beta}}{2N+1}, \frac{m}{\beta\bar{\beta}}\right)$$

$$\cdot \frac{(-1)^{k-j}}{\sin\pi\left(\frac{k-j}{2N+1}\right)} \exp\{2\pi i m w\}; \tag{5.20}$$

daß hierbei

$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin x \cos(2N+1)x - \frac{1}{2N+1}\sin(2N+1)x \cos x}{\sin^2 x} = 0$$

ist, läßt sich leicht durch zweimalige Anwendung der Bernoulli - l'Hospitalschen Regel zeigen.

$E'(\eta) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta}E(\eta)$ kann somit entsprechend Gleichung (4.60) unter Benützung der durch (5.20) gegebenen Stützwerte mit Hilfe der Simpsonschen Faßregel berechnet werden.

5.3. Abschätzung für große Defokussierungen

Während nun die OÜF $D(u,z)$ nur für $u < \frac{2b}{\lambda R}$ endliche Werte annimmt, also nur in diesem Bereich zu messen ist, und während - soweit auf diese zurückgegriffen wird - die Punktbildintensität mit zunehmender Entfernung von der optischen Achse immer kleiner wird, ist über das Verhalten der Übertragungsfunktion (im wesentlichen wird ja diese gemessen werden) für große Defokussierungen noch nichts gesagt worden. Noch erscheint es so, als ob sich die einer Rückrechnung zugrundezulegenden Daten über den gesamten Brennraum von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ zu erstrecken hätten. Zumindest in diesem Zusammenhang glücklicherweise werden mit zunehmender Defokussierung $|z|$ jedoch die Übertragungsfunktionen für höhere Ortsfrequenzen immer schlechter, der Abfall von $D(u,z)$ mit wachsendem u wird - wenn auch unter gleichzeitiger Zunahme der Anzahl der Nulldurchgänge - immer steiler [9 - 19], und ab einer gewissen Defokussierung können wir $D(u,z)$ durch

$$D(u,z) = \begin{cases} 1 & \text{für } u = 0 \\ 0 & \text{für } u \neq 0 \end{cases}$$

ersetzen. Betrachten wir z.B. die Übertragungsfunktion einer idealen Pupille (siehe (3.7))

$$D(u,z) = \frac{R}{2\pi bzu} \sin\left\{ 2\pi z\left(\frac{ub}{R} - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\right\} \quad ,$$

so nimmt die Einhüllende $\frac{R}{2\pi bzu}$ mit wachsendem z (und u) hyperbolisch ab; so nimmt $\frac{R}{2\pi bzu}$ in der Mitte des Ortsfrequenzbe-

reichs, d.h. bei $u = \frac{b}{\lambda R}$ bereits bei $z = \frac{10^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\beta\bar{\beta}} \approx 16 \frac{1}{\beta\bar{\beta}}$, also bereits nach 16 Samplingpunkten in z-Richtung den Wert 10^{-2} an. Die OÜF der idealen Pupille können wir dabei getrost als obere Grenze, d.h. als noch am wenigsten steil abfallenden Fall betrachten. Legen wir eine Lichtwellenlänge von 500 nm zugrunde und eine numerische Apertur von 0,1, so ist bei einem Abbildungsmaßstab von 1 : 1 der Abstand $\frac{1}{\beta\bar{\beta}}$ der einzelnen Samplingpunkte ca. 50 μm.

Aus diesem Grund ist es auch kaum zu erwarten, daß der Bereich, über den sich unsere Messung zur Gewinnung genügender Meßdaten zu erstrecken hätte, die experimentellen Möglichkeiten übersteigt. Insbesondere ist kaum zu erwarten, daß die Defokussierung zum Objektiv hin größer als R zu werden hat; sollte dies jedoch einmal der Fall sein, so sei auf einen Vorschlag in /9/ verwiesen, die Messung bei negativen z-Koordinaten unter Verwendung einer Zerstreuungslinse statt einer Sammellinse als Objektiv durchzuführen. Für eine analytische Fortsetzung aus einem bestimmten z-Bereich heraus /WOLTER 30 - 33/ sind zwar die theoretischen Voraussetzungen vorhanden, d.h. D(z) ist Fouriertransformierte einer stückweise stetigen, stückweise monotonen Funktion F(w), die außerhalb eines endlichen Intervalls verschwindet, die Fortsetzung erfolgt also mit nur endlicher Fehlerfortpflanzung, ferner sind gerade zur Berechnung von Samplingpunkten die entsprechenden Formeln besonders einfach, doch zeigt die Praxis /34/, daß um Werte an log N Punkten außerhalb eines Intervalls mit vernünftiger Genauigkeit berechnen zu können, innerhalb des Intervalls dazu N Punkte bekannt sein müssen.

Erste Experimente, die in Hinblick auf eine spätere Rückrechnung durchgeführt wurden /35/, haben in der Tat gezeigt, daß es keinesfalls die Hauptschwierigkeit ist, genügend weit zu defokussieren. Wesentlich größeren experimentellen Aufwand erfordert es, die Phase der OÜF genau genug zu bestimmen und außerdem aus Normierungsgründen bei genügend niedrigen Orts-

frequenzen messen zu können.

Hinsichtlich des zu erwartenden Auflösungsvermögens des Verfahrens sei auf einige Überlegungen in [9] hingewiesen.

6. Zusammenfassung

Pupillenfunktion und Lichterregung im Punktbild in der Gaußschen Bildebene sind einander über das Kirchhoffsche Beugungsintegral durch eine Fouriertransformation eindeutig umkehrbar zugeordnet, der Messung in der Bildebene zugänglich ist jedoch nur die Punktbildintensität bzw. deren Fouriertransformierte, die OÜF; ein eindeutiger Rückschluß auf das beugende Objekt ist nicht möglich. Wie bereits von H. PULVERMACHER festgestellt, gelingt die Rücktransformation erst durch Hinzunahme weiterer Information aus dem Brennraum. Die weitere Untersuchung dieser Tatsache und die Entwicklung expliziter Untersuchungsformeln ist Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Kapitel 1 und 2 geben eine Einführung in den verwendeten Formalismus und das außer in der Optik auch in der elektronenoptischen Feinstrukturanalyse auftretende "Phasenproblem". Gleichzeitig wird auf bisherige Lösungsansätze, und dabei insbesondere auf die Überlegungen von O'NEILL und WALTHER eingegangen; in diesem Zusammenhang wird bereits gezeigt, daß verschiedene, in der Gaußschen Bildebene zur selben Punktbildintensität und somit auch OÜF führende Pupillenfunktionen <u>außerhalb</u> der Bildebene durchaus verschiedene Intensitätsverteilungen bzw. Übertragungsfunktionen zur Folge haben.

Eine allgemeine Lösung des Phasenproblems enthält Kapitel 3. Wird die Punktbildintensität bei Defokussierung unter Verwendung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals dargestellt und werden geeignete neue Variable eingeführt, so erfordert diese Lösung im eindimensionalen Fall eine zweifache Fouriertransformation (FT) der Punktbildintensität bei Defokussierung bzw. eine einfache FT der entsprechenden OÜF und im zweidimensionalen Fall eine vierfache FT der Punktbildintensität mit Defokussierung und Astigmatismus oder eine zweifache FT der zugehörigen OÜF. Zwei Beispiele werden explizit

durchgerechnet.

Im Anschluß daran (Kapitel 4) wird untersucht, zur Rekonstruktion welcher zweidimensionaler Pupillenfunktionen auf die durch Astigmatismus gelieferte Information verzichtet werden kann. Ist die Pupillenfunktion nur von einem Parameter abhängig oder sind die Koordinaten separierbar, so kann durch Übergang von der Punktbildverteilung zur "line spread function" - d.h. durch Integration über die y- bzw. x-Achse im Bildraum - das Problem in einfacher Weise auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden. Die Umrandung der Pupille muß dabei in jedem Falle bekannt sein, sie kann jedoch - auch im Fall separierbarer Koordinaten - i.a. von beliebiger Form sein. Der rotationssymmetrische Fall hingegen erfordert zusätzlich zu einer einfachen FT noch die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung 1. Art. Nach Glättung und Überführung in eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art ist dies mit Hilfe einer Neumannschen Reihe möglich. Es ist dabei von besonderem Interesse, daß zur eindeutigen Lösung die Kenntnis der OÜF nur über den halben Ortsfrequenzbereich hinreichend ist.

Die Endlichkeit der Pupillen hat zur Folge, daß bei jeder der vorkommenden Fouriertransformationen das Sampling-Theorem ins Spiel kommt: Die OÜF bzw. die Punktbildintensität muß nur noch für bestimmte diskrete Werte der Defokussierung z bekannt sein, deren Abstand durch die numerische Apertur des Systems und die Wellenlänge des verwendeten Lichts gegeben ist; nach einer endlichen Anzahl von Samplingpunkten kann die Entwicklung abgebrochen werden. Um die Punktbildintensität bzw. die OÜF ebenfalls nur für bestimmte Aufpunkte bzw. Ortsfrequenzwerte bestimmen zu müssen und gleichzeitig numerische Auswertverfahren zur Hand zu haben, werden auch hier auf dem Sampling-Theorem bzw. einem modifizierten Runge-Verfahren basierende Interpolationsformeln entwickelt. Eine experimentelle Realisierung erscheint unter diesen Gesichtspunkten möglich. (Kapitel 5).

7. Literaturnachweis

1. H. H. Hopkins: Proc. Roy. Soc. A 217 (1953), 408;
2. M. Born and E. Wolf: Principles of Optics, London - New York - Paris - Los Angeles 1959;
3. M. J. Beran and G. B. Parrent jr.: Theory of Partial Coherence, New Jersey 1964;
4. J. M. Whittaker: Interpolatory Function Theory. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 33, Chapt. IV, Cambridge 1935;
5. E. L. O'Neill and A. Walther: Opt. Acta 10 (1963), 33;
6. A. Walther: Opt. Acta 10 (1963), 41;
7. I. N. Bronstein und K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Frankfurt/Main 1961;
8. F. Oberhettinger: Tabellen zur Fouriertransformation, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1957;
9. H. H. Pulvermacher: Anwendung von Matrixmethoden auf Probleme der Optischen Übertragungstheorie, Dissertation München 1966;
10. H. H. Hopkins: Proc. Roy. Soc. A 231 (1955), 91;
11. W. H. Steel: Opt. Acta 3 (1956), 65;
12. L. Levi and R. H. Austing: Appl. Optics 7 (1968), 967;
13. M. De: Proc. Roy. Soc. A 233 (1955), 91;
14. G. B. Parrent and C. J. Drane: Opt. Acta 3 (1956), 195;
15. G. Black and E. H. Linfoot: Proc. Roy. Soc. A 239 (1957) 522;
16. A. M. Goodbody: Proc. Phys. Soc. 72 (1958), 411;
17. - : Acta Electronica 2 (1957/58), 274;
18. R. Barakat: J. Opt. Soc. Am. 52 (1962), 985;
19. - and M. Morello: J. Opt. Soc. Am. 52 (1962), 992;
20. A. Papoulis: Systems and Transforms with Applications in Optics, New York - London - Sydney 1968;
21. R. Barakat: J. Opt. Soc. Am. 54 (1964), 920;
22. E. W. Marchand: J. Opt. Soc. Am. 54 (1964), 915;
23. M. Abramowitz and I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, New York 1965;

24. W. Gröbner und N. Hofreiter: Integraltafeln, 1. Teil: Unbestimmte Integrale, 3. Auflage Wien 1961;
25. Dto., 2. Teil: Bestimmte Integrale;
26. G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel - Functions, Cambridge 1922 (repr. 1944);
27. W. I. Smirnow: Lehrgang der Höheren Mathematik, Band IV, 4. Auflage Berlin 1966;
28. E. Jahnke und F. Emde: Funktionentafeln (Tables of Functions), New York 1945;
29. R. Zurmühl: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 5. Auflage Berlin - Heidelberg - New York 1965;
30. H. Wolter: AEÜ 12 (1958), 335;
31. - : AEÜ 13 (1959), 393;
32. - : AEÜ 13 (1959), 477;
33. - : Opt. Acta 7 (1960), 53;
34. A. Lohmann: Persönliche Mitteilung;
35. U. Rupe, R. Krusche und R. Röhler: In Vorbereitung (Vortrag auf der 72. Tagung der DGaO in Celle 1971).

Anhang I: Die Berechnung der bei O'NEILL und WALTHER /5/ angeführten Pupillenfunktionen

Zur Berechnung der 4 Pupillenfunktionen $\bar{G}_i(\bar{u})$ wird in /5/ folgende Methode angegeben ($\bar{u} = \frac{\lambda R}{2b} u$):

Man gehe aus von folgendem Integral:

$$\bar{G}(\bar{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi \bar{x}}{\pi \bar{x}}\right) \exp\{i \vartheta(\bar{x})\} \exp(-2\pi i \bar{u} \bar{x}) d\bar{x} \quad . \tag{A1.1}$$

Unter Benutzung des Faltungstheorems wird dies dargestellt als

$$\bar{G}(\bar{u}) = \int_{-1/2}^{1/2} U(\bar{u} - s) ds \tag{A1.2}$$

mit $$U(\bar{u}) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i \vartheta(\bar{x})\} \exp(\pm \lambda \bar{x}) \exp(-2\pi i \bar{u} \bar{x}) d\bar{x} \quad . \tag{A1.3}$$

Da sich in den vorliegenden Fällen die Phase der $\bar{K}_i(\bar{x})$ diskontinuierlich ändert, ist

$$\exp\{i \vartheta(\bar{x})\} = q_n \quad \text{mit jeweils} \quad n < \bar{x} < n+1 \quad , \tag{A1.4}$$

wobei q_n die Werte +1 oder -1 annehmen kann.

Es ist schließlich

$$U(\bar{u}) = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{\exp(\lambda - 2\pi i \bar{u}) - 1}{\lambda - 2\pi i \bar{u}} \sum_{-\infty}^{-1} q_n \exp\{(\lambda - 2\pi i \bar{u}) n\} \right. \tag{A1.5}$$

$$\left. + \frac{\exp(-\lambda - 2\pi i \bar{u}) - 1}{-\lambda - 2\pi i \bar{u}} \sum_{0}^{\infty} q_n \exp\{(-\lambda - 2\pi i \bar{u}) n\} \right\};$$

die q_n nehmen dabei für die 4 Spezialfälle folgende Werte an:

$\bar{K}_1(\bar{x})$: $q_n = +1$,

$\bar{K}_2(\bar{x})$: $q_n = +1$ für $n \geq 0$,

$q_n = -1$ für $n < 0$,

$\bar{K}_3(\bar{x})$: $q_n = (-1)^n$,

$\bar{K}_4(\bar{x})$: $q_n = (-1)^n$ für $n \geq 0$,

$q_n = (-1)^{n+1}$ für $n < 0$.

Im Fall 2, der in /5/ auch als Beispiel angeführt wird, führt diese Methode verhältnismäßig schnell zum Ziel, die Fälle 1 und 3 erfordern jedoch die Berechnung unbestimmter Ausdrücke der Form 0/0, was insbesondere im Fall 3 etwas langwierig wird, und im letzten Fall werden wir auf ein geschlossen nicht auswertbares Integral geführt (vgl. Formel 3.6).

Glücklicherweise sind jedoch $\bar{G}_1(\bar{u})$ und $\bar{G}_2(\bar{u})$ bekannt bzw. jeder beliebigen Tabelle für Fouriertransformationen zu entnehmen, und zur Berechnung der beiden anderen Pupillenfunktionen können wir folgende Fourierentwicklung /7/ heranziehen:

$$|\sin \pi\bar{x}| = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2n\pi\bar{x})}{(2n-1)(2n+1)} \qquad \text{(A1.6)}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2\pi\bar{x}}{1.3} + \frac{\cos 4\pi\bar{x}}{3.5} + \frac{\cos 6\pi\bar{x}}{5.7} + \ldots\ldots \right).$$

Da $\bar{K}_3(\bar{x})$ eine ungerade Funktion ist, ist $\bar{G}_3(\bar{u})$ die Fourier-Sinus-Transformation

$$\bar{G}_3(\bar{u}) = -2i \int_0^\infty \bar{K}_3(\bar{x}) \sin 2\pi\bar{u}\bar{x}\, d\bar{x} \qquad (A1.7)$$

von $\bar{K}_3(\bar{x}) = \frac{2}{\pi^2\bar{x}} - \frac{4}{\pi^2\bar{x}} \left(\frac{\cos 2\pi\bar{x}}{1.3} + \frac{\cos 4\pi\bar{x}}{3.5} + \frac{\cos 6\pi\bar{x}}{5.7} + \ldots\ldots\right),$ (A1.8)

es ist somit /8/

$$\bar{G}_3(\bar{u}) = -i\left\{\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \text{ für } \bar{u} > 1 \quad - \frac{4}{15\pi} \text{ für } \bar{u} > 2\right.$$

$$\left. - \frac{4}{35\pi} \text{ für } \bar{u} > 3 \quad - \frac{4}{63\pi} \text{ für } \bar{u} > 4 \quad \ldots\ldots\right\}, \qquad (A1.9)$$

was schließlich zu dem in (3.6) angegebenen Ausdruck führt.

Analog kann, da $\bar{K}_4(\bar{x})$ gerade ist, $\bar{G}_4(\bar{u})$ als Fourier-Kosinus-Transformation der durch $\bar{x}$ dividierten Reihe (A1.6) bestimmt werden, wobei diesmal die Form

$$\bar{K}_4(\bar{x}) = \frac{4}{\pi^2|\bar{x}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n\pi\bar{x}}{(2n-1)(2n+1)} \qquad (A1.10)$$

zweckmäßig ist. Es ist /8/

$$\bar{G}_4(\bar{u}) = 2 \int_0^\infty \bar{K}_4(\bar{x}) \cos 2\pi\bar{u}\bar{x}\, d\bar{x}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \int_0^\infty \frac{1 - \cos 2n\pi\bar{x}}{\bar{x}} \cos 2\pi\bar{u}\bar{x}\, d\bar{x}$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left|1 - \frac{n^2}{\bar{u}^2}\right|}{(2n-1)(2n+1)}, \qquad (A1.11)$$

ein Ausdruck, der sich leicht numerisch auswerten läßt.

Anhang II: Berechnung und Diskussion der zu 2 Beispielen von O'NEILL und WALTHER [5] gehörigen Übertragungsfunktionen D(u,z)

1) $G_1(\xi) \equiv G_1(\lambda Ru) = 1$ für $|\xi| \equiv |\lambda Ru| \leq b$, sonst 0:

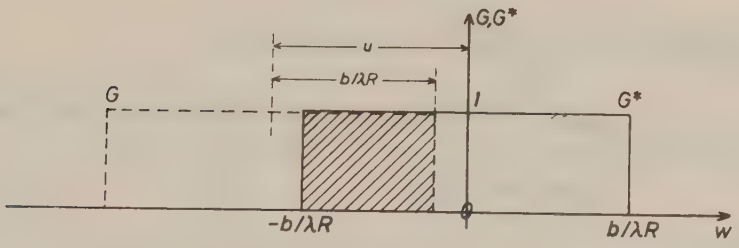


Fig. 14: Integrationsbereich bei der Berechnung von $D_1(u,z)$

$$D_1(u,z) = |\text{const.}'|^2 \int_{-b/\lambda R}^{b/\lambda R-u} \exp\{-2\pi i\lambda zuw\}\,dw \exp\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\}$$

$$= |\text{const.}'|^2 \exp\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\} \left.\frac{\exp\{-2\pi i\lambda zuw\}}{-2\pi i\lambda zu}\right|_{-b/\lambda R}^{b/\lambda R-u}$$

$$= |\text{const.}'|^2 \frac{\sin\{2\pi(\frac{zub}{R} - \frac{\lambda z}{2} u^2)\}}{\pi\lambda zu} \cdot \qquad \text{(A2.1)}$$

Der Grenzwert für $z \to 0$ ergibt sich nach der Bernoulli-l'Hospitalschen Regel sofort als

$$D_1(u,0) = \lim_{z\to 0} D_1(u,z) = |\text{const.}'|^2 (\frac{2b}{\lambda R} - u), \qquad \text{(A2.2)}$$

die Normierungsbedingung (2.11) liefert schließlich noch

$$|\text{const.}'|^2 = \frac{\lambda R}{2b}; \qquad \text{(A2.3)}$$

als weiterer Grenzwert ist

$$\lim_{u \to 0} D_1(u,z) = 1 \qquad \text{(A2.4)}$$

für den gesamten Brennraum.

2) $\underline{G_3(\xi) \equiv G_3(\lambda Ru) = -\frac{2i}{\pi}\{\ldots\}:}$

Mit $G_3(\xi) = -\frac{2i}{\pi} G_3'(\xi)$ ist

$$D_3(u,z) = |\text{const.}'|^2 \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_3'(\lambda R(w+u))\, G_3'(\lambda Rw)\, \exp\{-2\pi i \lambda zuw\}dw.$$
$$\cdot \exp\left\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\right\}, \qquad \text{(A2.5)}$$

d.h. es ist

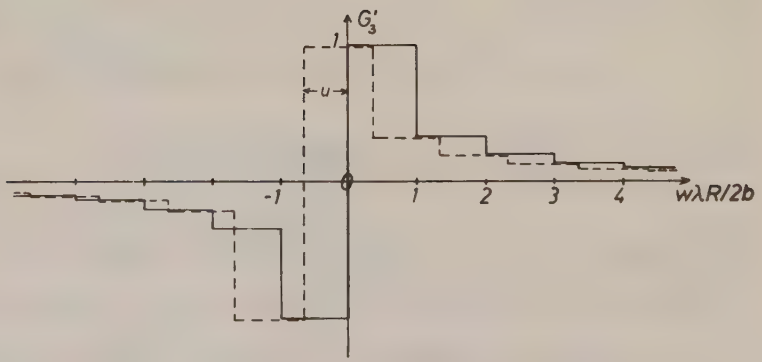


Fig. 15: Zur Berechnung von $D_3(u,z)$

$$D_3(u,z) = |\text{const.}'|^2 \frac{4}{\pi^2} \exp\left\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\right\} \cdot$$

$$\cdot \Bigg\{ \frac{1}{1\cdot 1} \int_0^{\frac{2b}{\lambda R}-u} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw + \frac{1}{1\cdot 3} \int_{\frac{2b}{\lambda R}-u}^{\frac{2b}{\lambda R}} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw$$

$$+ \frac{1}{3\cdot 3} \int_{\frac{2b}{\lambda R}}^{\frac{4b}{\lambda R}-u} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw + \frac{1}{3\cdot 5} \int_{\frac{4b}{\lambda R}-u}^{\frac{4b}{\lambda R}} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$- \frac{1}{1\cdot 1} \int_{-u}^{0} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw + \frac{1}{1\cdot 1} \int_{-\frac{2b}{\lambda R}}^{-u} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 3} \int_{-\frac{2b}{\lambda R}-u}^{-\frac{2b}{\lambda R}} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw + \frac{1}{3\cdot 3} \int_{-\frac{4b}{\lambda R}}^{-\frac{2b}{\lambda R}-u} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw$$

$$+ \frac{1}{3\cdot 5} \int_{-\frac{4b}{\lambda R}-u}^{-\frac{4b}{\lambda R}} \exp\{-2\pi i z\lambda u w\}\,dw + \cdots\cdots \Bigg\}. \qquad \text{(A2.6)}$$

Durch Auswertung der Integrale und geeignete Zusammenfassung erhält man hieraus dann

$$D_3(u,z) = |\text{const.}'|^2 \frac{8}{\pi^3 z\lambda u} \Bigg\{ - \sin(\pi\lambda z u^2) + \frac{1}{9} \sin\left(4\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right)$$

$$+ \frac{1}{75} \sin\left(8\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right)$$

$$+ \frac{1}{245} \sin\left(12\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{3} \sin\left(4\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right)$$

$$+ \frac{1}{45} \sin\left(8\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right)$$

$$+ \frac{1}{175} \sin\left(12\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right) + \cdots\cdots \Bigg\}$$

$$= |\text{const.}'|^2 \frac{8}{\pi^3 z\lambda u} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2} \sin\left(4n\pi z u \frac{b}{R} + \pi\lambda z u^2\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)} \sin\left(4n\pi z u \frac{b}{R} - \pi\lambda z u^2\right) \right\} . \qquad (A2.7)$$

Die Grenzwertbildung für $z \to 0$ mittels wieder der Bernoulli-l'Hospitalschen Regel gibt

$$\frac{1}{|\text{const.}'|^2} D_3(u,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{|\text{const.}'|^2} D_3(u,z)$$

$$= \frac{8}{\pi^3\lambda u} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n\pi u \frac{b}{R} + \pi\lambda u^2}{(2n-1)(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\pi u \frac{b}{R} - \pi\lambda u^2}{(2n-1)^2(2n+1)} \right\}$$

$$= -\frac{8u}{\pi^2} + \frac{128\, b}{\pi^2\lambda R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2(2n-1)^2} - \frac{16\, u}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)^2}$$

$$= -\frac{8u}{\pi^2} + \frac{128\, b}{\pi^2\lambda R} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{16}}{(2n+1)^2} - \frac{\frac{1}{16}}{2n+1} + \frac{\frac{1}{16}}{(2n-1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{2n-1} \right\}$$

$$- \frac{16\, u}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{4}}{(2n+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{2n+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(2n-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{2n-1} \right\}$$

$$= -\frac{8\, u}{\pi^2} + \frac{128\, b}{\pi^2\lambda R} \cdot \frac{\pi^2}{64} - \frac{16\, u}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2b}{\lambda R} - u \quad . \qquad (A2.8)$$

Die Normierungsbedingung $D(0,0) = 1$ führt wiederum zu

$$|\text{const.}'|^2 = \frac{\lambda R}{2b} .$$

Schließlich ist noch $D(u,z)$ für $u = \frac{2b}{\lambda R}$ zu berechnen. Es ergibt sich ($|\text{const.}'|^2$ nunmehr eingesetzt):

$$D\left(\frac{2b}{\lambda R}, z\right) = \frac{2\lambda R^2}{\pi^3 z b^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2} \sin\left\{ 4(2n+1)\pi z \frac{b^2}{\lambda R^2} \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)} \sin\left\{ 4(2n-1)\pi z \frac{b^2}{\lambda R^2} \right\} \right\},$$

und dies läßt sich zusammenfassen zu

$$D\left(\frac{2b}{\lambda R}, z\right) = \frac{4\lambda R^2}{\pi^3 z b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \sin\left\{ 4(2n-1)\pi z \frac{b^2}{\lambda R^2} \right\}; \qquad (A2.9)$$

dieser Ausdruck verschwindet natürlich nur für bestimmte Werte von z, z. B. für z = 0.

Anhang III: Berechnung der zur Pupillenfunktion $G(\xi) = 1 + i\xi$ gehörigen OÜF

Einsetzen der Pupillenfunktion in (2.25) gibt (Integrationsbereich ist derselbe wie in Gleichung (A2.1))

$$D(u,z) = |\text{const.}'|^2 \int_{-b/\lambda R}^{b/\lambda R-u} \{1 + i\lambda R(w+u)\}\{1 - i\lambda Rw\} \cdot \exp\{-2\pi i z\lambda uw\}dw \exp\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\} \qquad (A3.1)$$

$$= |\text{const.}'|^2 \exp\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\} \cdot \int_{-b/\lambda R}^{b/\lambda R-u} (\lambda^2R^2w^2 + \lambda^2R^2uw + 1 + i\lambda Ru) \exp\{-2\pi i z\lambda uw\}dw$$

$$= |\text{const.}'|^2 \exp\{-2\pi i \frac{\lambda z}{2} u^2\} \cdot \Big\{\lambda^2R^2 \left(-\frac{w^2}{2\pi i\lambda zu} + \frac{w}{2\pi^2\lambda^2z^2u^2} + \frac{1}{4\pi^3 i\lambda^3z^3u^3}\right)\exp\{-2\pi i z\lambda uw\}$$

$$+ \lambda^2R^2u\left(-\frac{w}{2\pi i\lambda zu} + \frac{1}{4\pi^2\lambda^2z^2u^2}\right)\exp\{-2\pi i z\lambda uw\}$$

$$- (1 + i\lambda Ru)\frac{1}{2\pi i\lambda zu}\Big\}\Bigg|_{-b/\lambda R}^{b/\lambda R-u}.$$

Durch geeignetes Zusammenfassen erhalten wir hieraus

$$D(u,z) = |\text{const.}'|^2 \cdot \Big\{\Big[-i\frac{R^2}{4\pi^3\lambda z^3u^3} + \frac{bR}{2\pi^2\lambda z^2u^2} - \frac{R^2}{4\pi^2z^2u} + i\frac{b^2+1}{2\pi\lambda zu} - \frac{R}{2\pi z} - i\frac{bR}{2\pi z}\Big]$$

$$\cdot \exp\{-2\pi i z(-\frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{b}{R}u)\} +$$

$$+\left[i\,\frac{R^2}{4\pi^3\lambda z^3u^3} + \frac{bR}{2\pi^2\lambda z^2u^2} - \frac{R^2}{4\pi^2z^2u^2} - i\frac{b^2+1}{2\pi\lambda zu} + \frac{R}{2\pi z} + i\frac{bR}{2\pi z} \right]$$

$$\cdot \exp\left\{ 2\pi i z \left(-\frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{b}{R}u \right) \right\} \Big\}$$

$$= |\text{const.}'|^2$$

$$\left[-\frac{R^2}{2\pi^3\lambda z^3u^3} + \frac{b^2+1}{\pi\lambda zu} - \frac{bR}{\pi z} + i\frac{R}{\pi z} \right] \sin\left\{ 2\pi z\left(\frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{b}{R}u\right)\right\}$$

$$+\left[\frac{bR}{\pi^2\lambda z^2u^2} - \frac{R^2}{2\pi^2z^2u} \right] \cos\left\{ 2\pi z\left(\frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{b}{R}u\right)\right\} \Big\}. \qquad \text{(A3.2)}$$

Zur Bestimmung der Normierungskonstanten empfiehlt es sich hier $D(u,0)$ entweder direkt mit Hilfe des Duffieuxintegrals (2.13) oder $|\text{const.}'|^2$ selbst mit Beziehung (3.22) zu bestimmen:

$$|\text{const.}'|^2 = \frac{\lambda R}{\int G(\xi)\, G^*(\xi)\, d\xi}$$

$$= \frac{\lambda R}{\int_{-b}^{b} (1+i\xi)(1-i\xi)\, d\xi}$$

$$= \frac{3\lambda R}{6b + 2b^3} \qquad \text{(A3.3)}$$

Anhang IV: Berechnung von F(ω)

$$F(\omega) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{\lambda^2 R^2}{4} u^2 - R^2 \frac{w^2}{u^2}}{\left\{(u^2-\omega^2)(\omega^2 u^2 - \frac{4}{\lambda^2} w^2)\right\}^{1/2}} du$$

$$= \frac{\lambda^2 R^2}{4\omega} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - \frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}}{\left\{u^4 - (\omega^2 + \frac{4w^2}{\lambda^2\omega^2}) u^2 + \frac{4w^2}{\lambda^2}\right\}^{1/2}} du \quad \Big| \begin{matrix} :u \\ :u \end{matrix}$$

$$= \frac{\lambda^2 R^2}{4\omega} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u - \frac{4w^2}{\lambda^2 u^3}}{\left\{u^2 - (\omega^2 + \frac{4w^2}{\lambda^2\omega^2}) + \frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}\right\}^{1/2}} du$$

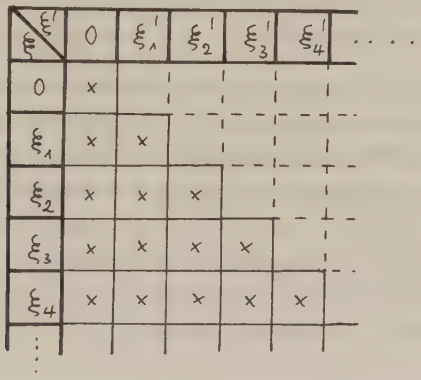
$$= \frac{\lambda^2 R^2}{4\omega} \left\{u^2 - (\omega^2 + \frac{4w^2}{\lambda^2\omega^2}) + \frac{4w^2}{\lambda^2 u^2}\right\}^{1/2} \Big|_{u_1}^{u_2}$$

$$= \frac{\lambda^2 R^2}{4u\omega} \left\{(u^2-\omega^2)(u^2 - \frac{4w^2}{\lambda^2\omega^2})\right\}^{1/2} \Big|_{u_1}^{u_2} . \qquad (A4.1)$$

Für beide unteren Grenzen wird der Wert des Integrals Null, so daß F(ω) endgültig den in (4.48) angegebenen Wert annimmt. Natürlich ist auch eine (wesentlich langwierigere) Auswertung des Integrals mit Hilfe Elliptischer Integrale möglich.

Anhang V: Ein Tabellenverfahren zur numerischen Berechnung der Pupillenfunktion aus dem Produkt $\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi')$

Nach der Auswertung der Meßdaten und der Rücktransformation liegt uns ein Ergebnis der Form $\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi')$ vor, und zwar i. a. in Form einer Tabelle, die wir wie folgt anschreiben wollen (der Einfachheit halber betrachten wir nur Werte für $\xi,\xi' \geq 0$):



Da wir uns (vgl. S. 23) auf Werte $\xi-\xi' \geq 0$ beschränken können, genügt - wie oben angedeutet - die halbe Tabelle. Der Rest liefert keine neue Information und kann aus den Werten der anderen Tabellenhälfte berechnet werden. Dies ist u. U. dann von Nutzen, wenn wir Werte von $\hat{G}\hat{G}^*$ für $\xi=\xi'$ durch Interpolation bestimmen wollen; denn für $\xi-\xi' = 0$ ist $\hat{G}\hat{G}^*$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $0\cdot\infty$ (vgl. etwa (3.24), $D(0,z)$ hat für alle z den Wert 1), der nur unter großen Schwierigkeiten direkt zu bestimmen ist.

Schreiben wir nun

$$\hat{G}(\xi) = a(\xi)\ \exp\{i\varphi(\xi)\}\ \text{und entsprechend}$$
$$\hat{G}^*(\xi') = a(\xi')\ \exp\{-i\varphi(\xi')\}, \qquad (A5.1)$$

so ist

$$\hat{G}(\xi)\hat{G}^*(\xi') = a(\xi)a(\xi') \exp\left\{ i\left[\varphi(\xi) - \varphi(\xi')\right]\right\}. \qquad (A5.2)$$

Für die Tabellendiagonale ($\xi=\xi'$) ist $\varphi(\xi) - \varphi(\xi') = 0$, die Tabellenwerte geben also sofort die Betragsquadrate $a^2(\xi_n)$. Die restliche Information liefert bereits die 1. Tabellenspalte. Hier hat die Phase von GG* den Wert $\varphi(\xi_n) - \varphi(0)$, und $\varphi(0)$ kann ohne weiteres gleich 0 gesetzt werden, da unsere Phasenbestimmung ja nur bis auf einen über die Pupille konstanten Phasenfaktor möglich ist.

Die bisher nicht benutzten Tabellenwerte können im Prinzip teilweise die Bestimmung der Werte der Tabellendiagonalen durch Interpolation überflüssig machen, ebenso können sie aber auch eventuell anderweitig nicht vorhandene Werte ersetzen.

Lebenslauf

Am 2. März 1940 wurde ich in Namslau/Schlesien als Sohn des Realoberlehrers Dr. Josef Krusche und seiner Ehefrau Antonie geb. Klemeck geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Vordersteinenberg und in Spraitbach (beides Kreis Schwäbisch Gmünd) war ich von 1949 bis 1954 Schüler des Parlergymnasiums in Schwäbisch Gmünd, ab 1954 dann Schüler des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart, wo ich am 27. Februar 1958 die Reifeprüfung ablegte.

Nach Absolvierung eines halbjährigen Industriepraktikums im Bundesbahnausbesserungswerk Eßlingen begann ich im WS 1958/59 das Physikstudium an der TH Stuttgart, das ich am 21. November 1966 mit der Diplom-Hauptprüfung abschloß. Die Diplomarbeit fertigte ich unter Anleitung von Prof. Dr. H. Bross am Institut für theoretische und angewandte Physik und Max-Planck-Institut für Metallforschung über das Thema "Die Widerstandsänderung von Kupfereinkristallen in Magnetfeldern bis 300 kOe" an.

Seit 1. Dezember 1966 bin ich am Institut für medizinische Optik der Universität München als wissenschaftliche Hilfskraft und seit 16. Oktober 1968 als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten beschäftigt; ich befasse mich dabei vorwiegend mit Fragen der Beugungstheorie und der Optischen Übertragungstheorie.

Den Herren Professoren Dr. Dr. H. Schober und Dr. R. Röhler danke ich für die interessante Themenstellung und für zahlreiche wertvolle Hinweise und Ratschläge, ferner danke ich Herrn Professor Dr. H. Bross für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Schließlich bin ich allen anderen Mitarbeitern des Institutes, allen voran Herrn Akadem. Rat Dr. H. Pulvermacher für die vielen Diskussionen zu Dank verpflichtet, die nicht unwesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.